ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA

ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

IMPERIAL MYCOLOGICAL INSTITUTE
19 JUNE 1939

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

ABRIL 1939 — ENTREGA IV — TOMO CXXVII

SUMARIO

Pág.

MATEMATICAS:

J. C. VIGNAUX. — Sobre las funciones polígenas de variable compleja y bicompleja hiperbólica 241

A. E. SAGASTUME BERRA y AGUSTÍN DURAÑONA y VEDIA. — Fundamentación axiomática del cálculo vectorial 268

FISICA:

ENRIQUE LOEDEL PALUMBO y ERNESTO R. SABATO. — Una nueva forma de introducir la temperatura 271

QUIMICA:

CARLOS A. SAGASTUME y VIRGILIO OLIVA. — La urobilina en la identificación de ínfimas cantidades de cobre y de mercurio 282

CIENCIAS NATURALES:

KENNETH J. HAYWARD. — Hesperioidea argentina IX 285

CARLOS RUSCONI. — Observaciones craneanas en los elefantes de mar.. 294

CIENCIAS ECONOMICAS:

EMILIO REBUELTO. — Tarifas ferroviarias (*Continuación*) 306

C. C. D. — Bibliografía 319

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FE 1145

1939

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
Dr. Mario Isola †
Dr. Germán Burmeister †
Dr. Benjamín A. Gould †
Dr. R. A. Phillippi †
Dr. Guillermo Rawson †
Dr. Carlos Berg †
Dr. Valentín Balbín †
Dr. Florentino Ameghino †

Dr. Carlos Darwin †
Dr. César Lombroso †
Ing. Luis A. Huergo †
Ing. Vicente Castro †
Dr. Juan J. J. Kyle †
Dr. Estanislao S. Zeballos †
Ing. Santiago E. Barabino †
Dr. Carlos Spegazzini †
Dr. J. Mendizábal Tamborel †

Dr. Enrique Ferri †
Ing. Eduardo Huergo †
Ing. Guillermo Marconi †
Dr. Walter Nernst
Dr. Eduardo L. Holmberg †
Dr. Alberto Einstein
Dr. Angel Gallardo †
Dr. Cristóbal M. Hicken †

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Aguilar; Ing. José Babini; Dr. Rómulo D. Carbia; Dr. Horacio Damianovich; Dr. Claro C. Dassen; Prof. Carlos E. Diculefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollán (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Dr. Rodolfo Rivarola; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Enrique V .Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1939-1940)

Presidente	Ingeniero **Jorge W. Dobranich**
Vicepresidente 1º	Doctor **Gonzalo Bosch**
Vicepresidente 2º	Doctor **Claro C. Dassen**
Secretario de actas	Arquitecto **Carlos E. Géneau**
Secretario de correspondencia.	Doctor **Santiago Barabino Amadeo**
Tesorero	Ingeniero **Edmundo Parodi**
Bibliotecario	Ingeniero **Carlos A. Lizer y Trelles**
Vocales	Doctor **Reinaldo Vanossi** Profesor **José F. Molfino** Doctor **Alfredo Sordelli** Ingeniero **Pablo E. Bordenave** Doctor **Marcelino Herrera Vegas** Doctor **Jorge Magnin** Doctor **Juan C. Vignaux** Doctor **Antonio Casacuberta** Ingeniero **Julio R. Castiñeiras**
Suplentes	Ingeniero **José S. Gandolfo** Ingeniero **Raúl E. Dubecq** Doctor **Alberto Castellanos** Cap. de Fragata **Teodoro Caillet Bois** Ingeniero **Alfredo G. Galmarini** Ingeniero **Benno J. Schnack**
Revisores de balances anuales.	Doctor **Félix Magnin** Ingeniero **Guillermo E. Cock**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, **Santa Fe 1145.**

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

SOBRE LAS FUNCIONES POLÍGENAS DE VARIABLE COMPLEJA Y BICOMPLEJA HIPERBÓLICA (*)

POR

J. C. VIGNAUX

INTRODUCCION. — M. POMPEIU, ha creado en estos últimos años, una nueva y fecunda rama de la teoría de funciones a la cual han aportado ya, valiosas contribuciones y numerosas aplicaciones a la Física Matemática, los recientes trabajos de KASNER, NICOLESCO, CALUGAREANO, THEODORESCO, y otros (1).

El fin principal de esta teoría, es el estudio de las funciones complejas de una variable compleja ordinaria

$$w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) \quad , \quad (i^2 = -1) \, ,$$

sin imponer a sus componentes reales u y v las condiciones de monoeneidad de CAUCHY-RIEMANN.

En esta teoría, juega un rol importante la noción de derivada areolar (POMPEIU) y la fórmula de POMPEIU, que generaliza a las funciones polígenas, la célebre fórmula de CAUCHY, de las funciones holomorfas (2).

(*) Trabajo entregado para su publicación en Enero de 1937.

(1) Las investigaciones de KASNER, HEDRICK, ZUGOLD, WESTFALL, y HOFMANN, tienen un caracter puramente geométrico.

(2) Una exposición de los fundamentos de esta teoría y su extensión a las funciones de varias variables, hemos dado en un curso del Colegio Libre Superior correspondiente al año 1933. Véase: *Anales de la Soc. Científica Argentinal* t. CXXI (1935). Sobre las funciones polígenas de varias variables véase una importante memoria del DR. E. MARTINELLI. *Reale Accademia d'Italia*, n° 3, (1937).

Nos proponemos desarrollar, en la primera parte de esta memoria, una teoría análoga, para las funciones complejas de una variable compelja hiperbólica (1); es decir, funciones de la forma

$$f(z) = u(x, y) + j\, v(x, y) = j_1 P(z', z'') + j_2 Q(z', z'')$$

donde

$$z = x + j\, y = z'\, j_1 + z''\, j_2$$

j, es la unidad imaginaria hiperbólica ($j^2 = +1$) y j_1, j_2 son las unidades imaginarias isótropas; sin imponer, a sus componentes la condición de *monogeneida hiperbólica* (1).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial P}{\partial z''} = 0 \, , \, \frac{\partial Q}{\partial z'} = 0 \, .$$

En la segunda parte de este trabajo, se extienden los resultados de la primera, a las funciones de variable *bicompleja* hiperbólica

$$z = x + j\, y \qquad (j^2 = +1)$$

donde x e y son dos complejos ordinarios

$$x = x_1 + i\, x_2 \quad , \quad y = y_1 + i\, y_2. \qquad (i^2 = -1)$$

A este tipo de bicomplejo se reduce fácilmente el hipercomplejo (cuartenion)

$$\alpha = x_1 + i\, x_2 + j\, x_3 + k\, x_4$$

considerado recientemente por M. Futagawa, el cual desarrolla con método muy complicado, en dos extensas memorias, el Algebra de estos hiperbicomplejos (2).

(1) El estudio de las funciones *analíticas de una variable compleja hiperbólica*, ha sido hecho en el siguiente trabajo: A. Durañona y Vedia - J. C. Vignaux. *Sobre la teoría de lsa funciones de una variable compleja hiperbólica*. Contribución al Estudio de las C.F.M. La Plata. (1935). E. 2.

Un estudio de las funciones polígenas de variable *compleja dual*, he dado en mi memoria de las *Contribuciones*, (1936) E. 3, 4, y en la Nota I. (*Rendiconti della R. Accademia N. dei Lincei*, Vol. XXVII, giugno 1938).

(2) M. Futagawa, *On the theory of a quaternary variable* (« Te Tôhoku Math. Journal », v. 29 (1928), pags. 175-222; v. 35 (1932), págs. 69-120).

La reducción de este cuaternion, a la forma normal o isótropa

$$\alpha = x + jy = t' j_1 + t'' j_2$$

y los resultados expuestos en la primera parte, nos permite obtener todos los resultados de Futagawa y otros nuevos con método mucho más simple y directo.

El trabajo abarca varios capítulos, que comprende las siguientes cuestiones. En el capítulo I, se estudian las propiedades fundamentales del número complejo hiperbólico, completando en varios puntos un trabajo anterior del autor.

En el Capítulo II, se introduce la noción de *derivada radial* y se dan algunas fórmulas fundamentales. Luego se definen la *derivada areolar hiperbólica* y la *derivada simétrica hiperbólica*, como operadores diferenciales; estableciéndose las relaciones que ligan a éstas con la derivada radial. Concluye el capítulo, con la cuestión de determinar la derivada de una función polígena, respecto a otra función polígena hiperbólica.

Una clase muy particular de estas funciones, es la formada por las funciones holomorfas y seudo-holomorfas. Dichas funciones holomorfas, tienen la particularidad de desempeñar el papel de constantes a los efectos de la derivación areolar hiperbólica. Nuevas propiedades de estas funciones y de las funciones complejas de una variable real, se dan aquí.

Introdúcese en el Capítulo III, la noción de integral para las funciones contínuas y se prueban dos fórmulas fundamentales relativas a las integrales de las funciones polígenas. Termina el mismo con las nociones de derivada areolar y de derivada simétrica como operadores integrales.

En el Capítulo IV se desarrolla el Algebra del bicomplejo hiperbólico.

Finalmente en el Capítulo V, se desarrolla la teoría de las funciones polígenas de variable bicompleja hiperbólica.

PARTE I

CAPITULO I

EL NUMERO COMPLEJO HIPERBOLICO

1. GENERALIDADES. — En el estudio del número complejo binario, se presentan tres tipos fundamentalmente distintos; los complejos ordinarios $a + bi$ donde $i^2 = -1$, los complejos hiperbólicos $a + bj$, con $j^2 = +1$, y los complejos duales $a + bk$ con $k^2 = 0$. De estos tres tipos, es únicamente la clase formada por los complejos ordinarios, los únicos que cumplen con todas las reglas formales del cálculo algebraico (1).

En esta parte, vamos a estudiar, las propiedades y las operaciones fundamentales de los números complejos hiperbólicos, completando en varios puntos una memoria anterior (2).

2. *Definiciones. — Se llama número complejo hiperbólico, el par ordenado* (a, b) *de dos números reales, los cuales cumplen a las siguientes condiciones.*

Igualdad. Dos complejos hiperbólicos (a, b), (a', b') son iguales, cuando se verifica

$$a = a', \quad b = b'$$

y se escribe

$$(a, b) = (a', b')$$

La igualdad de dos complejos hiperbólicos es por tanto *reflexiva, simétrica* y *transitiva.*

Dos complejos (a, b), (a', b') que no son iguales, se dicen desiguales y se pone en tal caso

$$(a, b) \neq (a', b') .$$

(1) Véase: E. GIGLI, *Dei numeri complessi a due e a più unità. Questioni...* F. ENRRIQUE. Vol. I, pág. 495.

(2) J. C. VIGNAUX, *Sobre el número complejo hiperbólico y su relación con la geometría de Borel*: Contribuciones... Vol. I, E. 1° (1935).

Respecto a la clase de los números complejos hiperbólicos, hay una brevísima indicación en las obras de L. VAN DER WAERDEN: *Moderne Algebra* 2. I. (pág. 150, n° 5 (a); STOLZ-GMEINER: *Theoretische Arithmetik* t. II, (pág. 227) y en el artículo de E. STUDY de la *Enzyklopadie d. mahtr. Wessenschaften* I. Bd 155.

Suma. Se llama suma de los complejos hiperbólicos (a, b), (a', b'), al complejo hiperbólico $(a + a',\ b + b')$; pondremos

$$(a, b) + (a', b) = (a + a', b + b') .$$

La suma es por tanto *conmutativa* y *asociativa.*

Esta definición no difiere de la suma de los números complejos ordinarios.

Producto. El producto de dos complejos hiperbólicos (a, b), $a', b')$ es por definición, el complejo hiperbólico $(a a' + b b',\ a b' + a' b)$; pondremos

$$(a, b) \times (a', b') = (a a' + b b',\ a b' + a' b) .$$

El producto es *conmutativo* y también *asociativo* como fácilmente se verifica.

La potencia de exponente n entero y positivo del complejo (a, b) está definida por la relación

$$(a, b)^n = (a, b) \times (a, b) \ldots \overset{n}{\smile} \times (a, b) .$$

Unidad real e hiperbólica. — El número complejo hiperbólico $(a, 0)$ es idéntico al número real a; pondremos

$$(a, 0) \equiv a ,$$

Un complejo hiperbólico, se reduce a un número real, solamente cuando su segundo componente es nula.

El complejo $(0, 0) = 0$ representa el *cero* escrito en forma de complejo hiperbólico.

El número complejo hiperbólico $(1, 0) = 1$, es la *unidad real*, mientras que el número complejo $(0, 1)$ es la *unidad hiperbólica* la cual indicaremos con el símbolo: $j = (0, 1)$. Se tiene por tanto

$$(0, 1) \times (0, 1) = (0 + 1, 0 + 0) = (1, 0) = 1$$

es decir

$$j \times j = j^2 = +1 .$$

De aquí resulta, como valor de las potencias sucesivas de la unidad j

$$j^1 = j \quad , \quad j^2 = +1 \quad , \quad j^3 = j \,.\, j^2 = j \quad , \quad j^4 = j^2 \,.\, j^2 = +1$$

es decir

$$j^{2n} = +1 \quad , \quad j^{2n+1} = j \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

con la convención que

$$j^0 = 1 .$$

Además se tiene

$$(b, 0) \times (0, 1) = (0, b)$$

es decir

$$bj = jb = (0, b) .$$

Forma normal. — Dado el complejo hiperbólico (a, b), se puede siempre escribir en la forma

$$(a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

y como

$$(a, 0) = a \quad , \quad (0, b) = bj$$

resulta

$$(a, b) = a + bj$$

que constituye la *forma normal* del complejo hiperbólico. Los números reales a y b son respectivamente, la *primer* y *segunda componente* del complejo $a + bj$.

Resulta entonces

$$(a + bj) + (a' + b'j) = (a + a') + (b + b')j$$

y

$$(a + bj) \times (a' + b'j) = (aa' + bb') + (ab' + a'b)j$$

3. *Unidades hiperbólicas isótropas.* — Llámase *unidades isótropas* a los números complejos hiperbólicos

$$j_1 = \frac{1}{2}(1 + j) \quad , \quad j_2 = \frac{1}{2}(1 - j) .$$

Se tiene entonces

$$j_1 = j_1 \quad , \quad j_2^2 = j_2 \quad , \quad j_1 . j_2 = j_2 . j_1 = 0$$

y en general

$$j_1^n = j_1 \quad , \quad j_2^m = j_2 \quad , \quad j_1^m . j_2^n = 0$$

para todo entero positivo n y m.

Además; resulta que

$$j_1 + j_2 = 1 \quad , \quad j_1 - j_2 = j \; ; \qquad [1]$$

la suma de las unidades isótropas es igual a la unidad real, mientras que su diferencia es igual a la unidad imaginaria hiperbólica.

Forma isótropa. — Dado el complejo hiperbólico $a + bj$, se puede escribir teniendo en cuenta las relaciones [1]

$$a + bj = (a + b)\, j_1 + (a - b)\, j_2$$

y poniendo

$$a + b = A \quad , \quad a - b = B \, ,$$

resulta finalmente

$$a + bj = A j_1 + B j_2$$

que llamaremos la *forma isótropa* del complejo dado; y a los números reales A y B su primer y segunda componente isótropas respectivamente.

El pasaje de la forma normal a la forma isótropa y recíprocamente se obtiene mediante las relaciones siguientes

$$a + b = A \quad , \quad a - b = B$$

y

$$a = \frac{1}{2}(A + B) \quad , \quad b = \frac{1}{2}(A - B) \, .$$

De aquí, resulta

$$a = a + 0j = a j_1 + a j_2 = a\,(j_1 + j_2) = a \; ;$$

luego, el complejo hiperbólico: $a' j_1 + a'' j_2$ se reduce a un *número real* a, si $a' = a'' = a$.

La forma isótropa de un complejo hiperbólico puro: $\alpha = bj$ es

$$\alpha = b j_1 - b j_2 = b\,(j_1 - j_2) = bj \, .$$

Observación. — La expresión del número complejo en su « forma isótropa » y las propiedades de las « unidades isótropas »

$$j_1^2 = j_1 \quad , \quad j_1 j_2 = j_2 j_1 = 0 \quad , \quad j_2^2 = j_2 \, ,$$

característica exclusiva de estos números complejos a dos unidades distintas; prueba que este sistema de números complejos es la « suma directa » de dos *cuerpos isomorfos*, con el cuerpo de los números reales. (VAN DER WAERDEN: *Moderne Algebra*: 2. I, pág. 150, n° 5).

La denominación de «unidades isótropas» y de « expresión isótropa » que hemos introducido responden al hecho de adoptar como ejes para representar estas unidades, las rectas *isótropas reales* de la geometría hiperbólica de BOREL-KLEIN; rectas que coinciden con las dos rectas *características* que pasan por el origen, de la ecuación hiperbólica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \, ,$$

a la cual satisfacen las componentes reales de una función holomorfa hiperbólica. Por esto, podríamos denominarlas también « unidades características » reservando la denominación « unidades » a las unidades 1 y j.

Operaciones directas. — Las operaciones fundamentales directas de dos complejos de la forma isótropa, se obtienen en la forma siguiente.

Sean

$$A = \alpha j_1 + \beta j_2 \quad , \quad A' = \alpha' j_1 + \beta' j_2$$

los dos complejos hiperbólicos; la suma está definida por la relación

$$A + A' = (\alpha + \alpha') j_1 + (\beta + \beta') j_2$$

y el producto, por

$$A \times A' = \alpha \alpha' j_1 + \beta \beta' j_2 \, .$$

La potencia de exponente entero y positivo por la relación

$$(\alpha j_1 + \beta j_2)^n = (\alpha j_1 + \beta j_2) \times (\alpha j_1 + \beta j_2) \times \ldots \times (\alpha j_1 + \beta j_2)$$

es decir

$$(\alpha j_1 + \beta j_2)^n = \alpha^n j_1 + \beta^n j_2$$

4. *La anulación del producto.* — El producto de un complejo hiperbólico (a, b) por el complejo nulo $(0, 0)$, es *cero*, puesto que

$$(a, b) \times (0, 0) = (a \times 0 + b \times 0) + (a \times 0 - b \times 0) = (0, 0) = 0 .$$

Si se tiene, el producto de varios complejos hiperbólicos, uno de los cuales es nulo, el producto es también cero.

La recíproca no se verifica necesariamente; así, por ejemplo,

$$(3 + 3j) \times (4 - 4j) = 0$$

Por tanto, *es condición suficiente pero no necesaria para que sea nulo el producto de dos complejos hiperbólicos, que uno de sus factores sea cero.*

Sean

$$\alpha = a + bj \qquad \text{y} \qquad \beta = x + yj$$

dos complejos no nulos y veamos cual es la condición necesaria para que su producto sea *nulo*. La condición

$$\alpha \,.\, \beta = (a\,x + b\,y) + (a\,y + b\,x)\,j = 0$$

implica que

$$a\,x + b\,y = 0 \quad [1] \qquad a\,y + b\,x = 0 \quad [1]$$

De la (1) resulta

$$x = -\frac{a}{b}\,y \ ,$$

que substituyendo en la (2), se obtiene

$$(a^2 - b^2)\,y = 0$$

y como: $y \neq 0$, deberá ser entonces

$$a^2 - b^2 = 0$$

de donde resulta que $a = \pm b$.

Luego, para

$$a = +b \quad \text{resulta} \quad x = -$$

$$a = -b \quad \text{»} \quad x = y$$

por tanto, los productos

$$(a + aj) \times (x - yj) = 0$$

y

$$(a - aj) \times (x + yj) = 0$$

cualquiera sean las componentes a y x.

Si se ponen α y β en su forma isótropa

$$\alpha = Aj_1 + Bj_2 \quad , \quad \beta = Xj + Yj_2 \, ,$$

entonces resulta

$$a + aj = 2\, aj_1 \quad , \quad x - xj = 2\, xj_2$$

$$a - aj = 2\, aj_2 \quad , \quad x + xj = 2\, xj_1$$

y las relaciones (3) y (4), nos dan

$$2\, aj_1 \times 2\, xj_2 = 0$$

$$2\, aj_2 \times 2\, xj_1 = 0$$

Dados los complejos: $c \pm cj$; $d \pm d'j$, los números

$$c + cj = 2\, cj_1 \quad , \quad d + dj = 2\, dj_1$$

y

$$c - cj = 2\, cj_2 \quad , \quad d - dj = 2\, dj_2$$

llamaremos complejos de la *misma especie*.

Luego; *la condición necesaria y suficiente para que el producto de dos complejos hiperbólicos distintos de cero sean nulos es que sus factores sean de distinta especie.*

Llamaremos complejos hiperbólicos *conjugados* a los complejos

$$\alpha = a + bj \quad \text{y} \quad \overline{\alpha} = a - bj$$

Se tiene

$$(a + bj) + (a - bj) = 2\, a$$

y

$$(a + bj) \times (a - bj) = a^2 - b^2$$

es decir, su suma y su producto son números reales.

Llamaré *norma hiperbólica del complejo* $a + bj$, al número: $a^2 - b^2$ e indicaremos

$$Nh\ (a + bj) = a^2 - b^2 .$$

La forma isótropa de dos complejos hiperbólicos conjugados es

$$\alpha = A j_1 + B j_2 \qquad \overline{\alpha} = B j_1 + A j_2$$

y de la norma hiperbólica.

$$Nh\ (A j_1 + B j_2) = A \,.\, B \ .$$

Llamaré *módulo* o *valor* absoluto del complejo $a + bj$ e indicaremos con $| a + bj |$, el número real y positivo

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

Si el complejo $a + bj$ es nulo, resulta que $| a + bj | = 0$ y recíprocamente; *luego la condición necesaria y suficiente para que un complejo sea nulo es que su módulo sea cero.*

De la definición de suma se concluye que *el módulo de una suma de dos complejos hiperbólicos es menor o igual a la suma de los módulos de sus términos y mayor o igual que su diferencia.*

Además se tiene

$$| A j_1 + B j_2 | \leq \frac{| A | + | B |}{\sqrt{2}}$$

5. *Divisor de cero.* — Diremos que el complejo hiperbólico $\alpha = a + bj$ es un *divisor de cero*, si existe un complejo β, *no nulo* tal que

$$\alpha \times \beta = 0$$

El número α deberá ser necesariamente de la forma $a \pm aj$; por tanto resulta

$$N\ (\alpha) = a^2 - a^2 = 0$$

Recíprocamente, si se verifica la relación: $N(\alpha) = 0$ se tiene

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b) = 0$$

luego

$$a = b \quad , \quad a = - b$$

y los complejos hiperbólicos

$$a + aj \quad , \quad a - aj$$

son divisores de cero. Portanto: *es condición necesaria y suficiente para que el complejo hiperbólico* $a + bj$ *sea un divisor de cero, que su norma hiperbólica sea cero.*

Si el complejo $a + bj$ se pone en su forma isótropa

$$a + bj = (a + b)\, j_1 + (a - b)\, j_2 = A j_1 + B j_2$$

se tiene

$$N(a + bj) = A.B\,.$$

La condición: $N(a + bj) = 0$, equivale por tanto a la

$$A.B = 0$$

Si

$$B = 0 \quad , \quad A \neq 0 \quad , \quad \text{resulta} \quad a = b$$

Si

$$A = 0 \quad , \quad B \neq 0 \quad , \quad \text{» } \quad a = -b\,;$$

luego

$$a + aj = A j_1 \quad , \quad a - aj = B j_2\,.$$

De aquí: *la condición necesaria y suficiente para que un complejo de la forma isótropa, sea un divisor de cero, es que sea nula una de sus dos componentes isótropas.*

Teorema I. — *Si los dos complejos hiperbólicos* $C = c + c'j$, $D = d + d'j$, *son divisores de cero de la misma especie, la expresión*

$$C + D\alpha = P j_1 + Q j_2$$

donde α *es un parámetro real o complejo hiperbólico no divisor de cero es también un divisor de cero y recíprocamente.*

Si $\alpha = \alpha' + \alpha'' j$, con $\alpha' \neq \alpha''$, se tiene

$$C + D\alpha = [(c + c')\, j_1 + (c - c')\, j_2] + [(\alpha + \alpha')\, j_1 + (\alpha - \alpha')\, j_2]$$

$$[(d + d')\, j_1 + (d - d')\, j_2] = [(c + c')\, j_1 + (c - c')\, j_2] +$$

$$+ [(\alpha' + \alpha'')\,(d + d')\, j_1 + (\alpha' - \alpha'')\,(d - d')\, j_1] = [(c + c') +$$

$$+ (\alpha' + \alpha'')\,(d + d')]\, j_1 + [(c - c') + (\alpha' - \alpha'')\,(d - d')]\, j_2$$

Como por hipótesis es : $c = c'$, $d = d'$; o bien $c = -c'$, $d = -d'$, resulta en el primer caso que $Q = 0$ y en el segundo $P = 0$, luego el complejo $C + D\alpha$ es un divisor de cero.

Recíprocamente, si $Pj_1 + Qj_2$ es un divisor de cero, resulta

$$P = 0 \quad \text{ó bien} \quad Q = 0 ;$$

en el primer caso resulta: $c = -c'$, $d = -d'$ y en el segundo: $c = c'$, $d = d'$; por tanto los complejos C y D son divisores de cero de la misma especie.

Teorema II. — *El complejo hiperbólico*

$$C + D\alpha \qquad (\alpha \text{ real}) .$$

es un divisor de cero, para los dos valores de α

$$\alpha_1 = -\frac{c + c'}{d + d'} \quad , \quad \alpha_2 = -\frac{c - c'}{d - d'} ,$$

siempre que $D = d + d'j$ *no sea un divisor de cero o cero.*

Se tiene

$$C + D\alpha = [(c + c') + \alpha\,(d + d')]\,j_1 + [(c - c') + \alpha\,(d - d')]\,j_2 \quad [1]$$

y la condición necesaria y suficiente para que la (1) sea un divisor de cero es que

$$(c + c') + \alpha\,(d + d') = 0 \qquad [2]$$

o bien que

$$(c - c') + \alpha\,(d - d') = 0 \qquad [3]$$

De la (2) resulta: $\alpha = -\dfrac{c + c'}{d + d'}$ puesto que $d + d' \neq 0$; y de la (3) se tiene: $\alpha = -\dfrac{c - c'}{d - d'}$ donde $d - d' \neq 0$.

En particular, si $C = c + c'j$ es un divisor de cero: $c = c'$ ó $c = -c'$; se tiene respectivamente que

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{o} \quad \alpha_2 = 0 .$$

6. *Operaciones inversas.*—La *diferencia* de dos complejos: $\alpha = a + bj$, $\alpha' = a' + b'j$, es otro complejo que sumado al segundo, reproduce el primero. Se tiene

$$a - a' = (a - a') + (b - b')\, j$$

En particular

$$\alpha - \bar{\alpha} = 2\, bj\,.$$

Si

$$a = Aj_1 + Bj_2 \quad , \quad \alpha' = A'j_1 + B'j_2$$

resulta

$$\alpha - \alpha' = (A - A')\, j_1 + (B - B')\, j_2$$

y

$$\alpha - \bar{\alpha} = (Aj' + Bj_2) + (Bj_1 + Aj_2)$$

$$= (A - B)\, j_1 + (B - A)\, j_2$$

Se llama *recíproco* o *inverso* de un complejo $\alpha = a + bj$ a todo complejo $x + jy$ que multiplicado por α sea igual a 1. La igualdad

$$(a + bj) \times (x + yj) = 1$$

exige que

$$ax + by = 1 \quad , \quad bx + ay = 0$$

Si el determinante fundamental de este sistema lineal

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = N\,[\alpha]$$

es distinto de cero, resulta

$$x = \frac{a}{a^2 - b^2}\,, \; y = -\frac{b}{a^2 - b^2}$$

Por tanto, indicando con $\frac{1}{\alpha}$ el inverso de α, se tiene

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a - bj}{a^2 - b^2}$$

Si el complejo hiperbólico $a + bj$ no es nulo ni divisor de cero, existe siempre su inverso y es único.

Llamaremos *cociente* de los complejos hiperbólicos $a + bj$, y $a' + b'j$, donde el segundo es *distinto de cero* o *divisor de cero*, al producto del primero por el inverso del segundo; es decir

$$\frac{a + bj}{a' + b'j} = a + bj \times \frac{1}{a' + b'j} = \frac{aa' - bb'}{a'^2 - b'^2} + \frac{ab' - a'b}{a'^2 - b'^2} j \ .$$

La división es por tanto posible y única, siempre que el divisor no sea un divisor de cero o un complejo nulo.

Si el complejo está dado en la forma isótropa $\alpha = \alpha' j_1 + \beta' j_2$ su inverso está definido por la relación

$$\frac{1}{\alpha' j_1 + \beta' j_2} = \frac{1}{\alpha'} j_1 + \frac{1}{\beta'} j_2$$

siempre que

$$\alpha' \neq 0 \quad \text{y} \quad \beta' \neq 0 \ .$$

El cociente de los complejos $\alpha_1 = \alpha j_1 + \beta j_1$, $\alpha'_2 = \alpha' j_1 + \beta' j_2$ es igual a

$$\frac{\alpha j_1 + \beta j_2}{\alpha j_1 + \beta j_2} = (\alpha j_1 + \beta j_2) \times \frac{1}{\alpha' j_1 + \beta' j_2} =$$

$$= (\alpha j_1 + \beta j_2) \left(\frac{1}{\alpha'} j_1 + \frac{1}{\beta'} j_2 \right)$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha'} j_1 + \frac{\beta}{\beta'} j_2$$

siempre que el complejo $\alpha j_1 + \beta j_2$ no sea un divisor de cero.

Teorema III. — *La condición necesaria y suficiente para que la expresión*

$$\frac{A + B\alpha}{C + D\alpha} \qquad [1]$$

donde C y D no son divisores de cero de la misma especie y α no toma ninguno de los dos valores

$$\alpha_1 = -\frac{c + c'}{d + d'} \ , \qquad \alpha_2 = -\frac{c - c'}{d - d'} \ ,$$

sea independiente de α, es que se verifique la relación

$$AD = BC \ .$$

Según las hipótesis, la relación (1) tiene sentido; por tanto

$$\frac{A + B\alpha}{C + D\alpha} = \frac{(a'j_1 + a''j_2) + \alpha\,(b'j_1 + b''j_2)}{(c'j_1 + c''j_2) + \alpha\,(d'j_1 + b''j_2)}$$

$$= \frac{(a' + \alpha b')j_1 + (a'' + \alpha b'')j_2}{(c' + \alpha d')j_1 + (c'' + \alpha d'')j_2}$$

de donde

$$\frac{A + B\alpha}{C + D\alpha} = \frac{a' + \alpha b'}{c' + \alpha d'}\,j_1 + \frac{a'' + \alpha b''}{c'' + \alpha d''}\,j_2$$

La condición necesaria y suficiente para que la (1) sea independiente del parámetro α, es que sus componentes isotropas, sean independientes de α, lo cual exige que

$$a'd' = b'c' \quad , \quad a''d'' = b''c'' \,. \qquad [2]$$

Por otra parte, se tiene

$$A \,.\, D = (a'j_1 + a''j_2)\,(d'j_1 + d''j_2) =$$

$$= a'd'j_1 + a''d''j_2$$

y

$$B \,.\, D = b'c'j_1 + b''d''j_2 \,;$$

y teniendo en cuenta las igualdades (2), estas dos últimas resultan

$$AD = BC \,.$$

Potencia. — La potencia de exponente entero y positivo del número complejo hiperbólico $\alpha j_1 + \beta j_2$, está definida por la relación

$$(\alpha j_1 + \beta j_2)^n = (\alpha j_1 + \beta j_2) \,.\, (\alpha j_1 + \beta j_2) \,\ldots\, (\alpha j_1 + \beta j_2)$$

de donde

$$(\alpha j_1 + \beta j_2)^n = \alpha^n j + \beta^n j_2$$

Del mismo modo

$$(\alpha j_1 - \beta j_2)^n = \alpha^n j_1 \pm \beta^n j_2 \,,$$

según sea *n par* o *impar* respectivamente corresponde el signo + ó —.

En el caso que el exponente es entero y negativo (— n) la potencia se define por la relación

$$(\alpha j_1 + \beta j_2)^{-n} = \frac{1}{(\alpha j_1 + \beta j_2)^n} = \frac{1 \,.\, j_1 + 1 \,.\, j_2}{\alpha^n j_1 + \beta^n j_2} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^n}\,j_1 + \frac{1}{\beta^n}\,j_2 = j_1\alpha^{-n} + j_2\beta^{-n} \,.$$

siempre que el complejo no sea divisor de cero.

Raíz. — Llamamos raíz n^{esima} del complejo hiperbólico $\alpha j_1 + \beta j_2$, a todo complejo hiperbólico $x j_1 + y j_2$, tal que su potencia n^{esima} sea igual al primero. Se tiene entonces

$$\alpha j_1 + \beta j_2 = (x j_1 + y j_2)^n = x^n j_1 + y^n j_2 \qquad [1]$$

de donde

$$\alpha = x^n \quad [2] \quad , \quad \beta = y^n . \qquad [3]$$

Hay que considerar dos casos distintos según que el índice de la raíz sea par o impar.

I) Si *n es impar*, las relaciones (2) y (3) dan para x e y un solo valor real

$$x = \sqrt[n]{\alpha} \quad , \quad y = \sqrt[n]{\beta}$$

cualquiera sea el signo de α y de β. Por tanto el complejo $\alpha j_1 + \beta j$ tiene una sola raíz n^{esima}

$$\sqrt[n]{\alpha j_1 + \beta j_2} = j_1 \sqrt[n]{\alpha} + j_2 \sqrt[n]{\beta} .$$

II) Si *n es par* y $\alpha > 0$, $\beta > 0$, existen dos valores reales para x y dos valores reales para y.

$$x = \pm \sqrt[n]{\alpha} \quad , \quad y = \pm \sqrt[n]{\beta}$$

resultando como raíz n^{esima} del complejo $\alpha j_1 + \beta j_2$ los cuatro valores siguientes

$$\begin{cases} \delta_1 = j_1 \sqrt[n]{\alpha} + j_2 \sqrt[n]{\beta} \quad , \quad \delta_2 = -j_1 \sqrt[n]{\alpha} - j_2 \sqrt[n]{\beta} , \\ \delta_2 = j_1 \sqrt[n]{\alpha} - j_2 \sqrt[n]{\beta} \quad , \quad \delta_4 = -j_1 \sqrt[n]{\alpha} + j_2 \sqrt[n]{\beta} ; \end{cases} \qquad [5]$$

fácil de verificar inmediataemnte. Por tanto: *todo complejo hiperbólico en la forma isótropa, tiene una sola raíz de grado impar dada por la relación* (4); *mientras tiene cuatro raíces de grado par, siempre que sus componentes isótropas sean positivas, las cuales están dadas por las relaciones* (5).

7. *Forma trigonométrica.*—Dado el complejo hiperbólico $a + bj$, se puede siempre determinar dos números ρ y φ tales que

$$a = \rho \cos \rho, \quad b = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

de donde resulta

$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y

$$a + bj = \rho\,(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi)$$

que llamaremos la forma trigonométrica del complejo hiperbólico.

El módulo ρ está determinado sin ambigüedad, meintras que su argumento φ, definido por sus funciones trigonométricas no está determinado sino a un múltiplo de 2π. Todo número complejo hiperbólico tiene una infinidad de argumentos que forman una sucesión aritmetica de razón igual a 2π (lo mismo que en el caso del complejo ordinario).

Si se multiplican dos complejos hiperbólicos

$$\alpha = \rho\,(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi) \quad , \quad \alpha' = \rho'\,(\cos\varphi' + j \operatorname{sen}\varphi')$$

resultan

$$\alpha.\alpha' = \rho\rho'\,[\cos(\varphi - \varphi') + j \operatorname{sen}(\varphi + \varphi')]\,, \qquad [1]$$

no se cumple por tanto, el conocido teorema de Moibre sobre producto de complejos ordinarios.

La fórmula (1) permite obtener una expresión simple del módulo del producto y un *límite superior* del mismo. En efecto; se tiene, llamando con R el módulo del producto

$$R^2 = \rho^2 \rho'^2\,[1 + \operatorname{sen}^2(\varphi + \varphi') - \operatorname{sen}^2(\varphi - \varphi')]$$

de donde resulta

$$R = \rho\rho'\sqrt{1 + \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} 2\varphi'}$$

y por tanto

$$\boxed{R \leq \sqrt{2}\,.\,\rho\rho'}\,.$$

8. Forma factorial.– Dado el complejo hiperbólico $a + bj$, se puede definir dos números reales ρ y θ por la relación

$$\begin{cases} a = \rho \cosh\theta\,. \\ b = \rho \operatorname{senh}\theta\,. \end{cases} \qquad (1)$$

siempre evidentemente que, $|a| > |b|$; puesto que de la [1] se deduce

$$a^2 - b^2 = \rho^2, \quad \text{es dicir:} \quad \rho = \pm\sqrt{a^2 - b^2} \tag{2}$$

y

$$\frac{b}{a} = tg\, h\, \theta\,. \tag{3}$$

Como cos$h$ θ es siempre *positivo*, resulta por la primera de las relaciones [1], que ρ es *positivo* o *negativo* según que $a > 0$, ó $a < 0$ respectivamente.

Sustituyendo en $a + bj$, a y b por los valores [1]; se tiene

$$a + bj = \rho\,(\cos h\,\theta + j \operatorname{sen} h\,\theta)$$

una nueva forma del complejo hiperbólico, que llamaré *forma factorial.*

El número real: $\rho \gtreqless 0$ es el *módulo hiperbólico* de $a + bj$, mientras que θ es su *argumento hiperbólico* $(-\infty < \theta < \infty)$.

Observemos que la correspondencia entre los números (a y b) y los números (ρ, θ) es *biunívoca*, según [2] y [3] y del hecho que la función cos$h$ θ y sen$h$ θ no tienen *período real.*

En el caso de $|a| < |b|$, bastará considerar las relaciones simétricas

$$\begin{cases} a = \rho \operatorname{sen} h\,\theta \\ b = \rho \cos h\,\theta \end{cases} \tag{5}$$

de donde

$$\rho^2 = b^2 - a^2 \quad \text{es decir} \quad \rho = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$$

$$\frac{a}{b} = tg\, h\,\theta\,.$$

En este caso, convendremos en tomar el número real

$$\rho = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$$

como módulo hiperbólico; y la forma factorial del complejo $a + bj$, será

$$a + bj = \rho\,(\operatorname{sen} h\,\theta + j \cos h\,\theta)\,. \tag{6}$$

Evidentemente, los divisores de cero $\alpha = a \pm aj$, carecen de expresión factorial.

Por tanto: *dado un complejo hiperbólico* $a + bj$ *no divisor de cero, se puede siempre poner en una de las dos formas* [4] ó [6], *según que* $|a| > |b|$ ó $|a| < |b|$ *respectivamente, y recíprocamente, dado el complejo en la forma factorial* [4] ó [6], *queda determinado unívocamente su forma normal:* $a + bj$. *Los divisores de cero no tienen expresión factorial.*

MÓDULO Y ARGUMENTO HIPERBÓLICO DEL PRODUCTO. — Sean los dos complejos:

$$\alpha = \rho\,(\cosh\theta + j\,\operatorname{senh}\theta) \quad , \quad \alpha' = \rho'\,(\cosh\theta' + j\,\operatorname{senh}\theta')$$

se tiene

$$\alpha\alpha' = \rho\rho'\,[\cosh(\theta + \theta) + j\,\operatorname{senh}(\theta + \theta')]\,.$$

luego

$$\operatorname{mód} h\,(\alpha\alpha') = \rho\rho' \quad , \quad \arg h\,(\alpha\alpha') = \theta + \theta'$$

Si los complejos son de la forma

$$\alpha = \rho\,(\operatorname{senh}\theta + j\cosh\theta) \quad , \quad \alpha' = \rho'\,(\operatorname{senh}\theta + j\cosh\theta')$$

se tiene

$$\alpha\alpha' = \rho\rho'\,[\cosh(\theta + \theta') + j\,\operatorname{senh}(\theta + \theta')]$$

y por tanto

$$\operatorname{mód} h\,(\alpha\alpha') = \rho\rho' \quad , \quad \arg h\,(\alpha\alpha') = \theta + \theta'\,.$$

En el caso que fuera

$$\alpha = \rho\,(\cosh\theta + j\,\operatorname{senh}\theta) \quad , \quad \alpha' = \rho'\,(\operatorname{senh}\theta' + j\cosh\theta')$$

resulta

$$\alpha\alpha' = \rho\rho'\,[\operatorname{senh}(\theta + \theta') + j\cosh(\theta + \theta')]$$

luego

$$\operatorname{mód} h\,(\alpha\alpha') = \rho\rho' \quad , \quad \arg h\,(\alpha\alpha') = \theta + \theta'\,.$$

De aquí: *el producto de dos complejos hiperbólicos tiene por módulo hiperbólico, el producto de sus módulos hiperbólicos y por argumento hiperbólico, la suma de los argumentos hiperbólicos.*

MÓDULO Y ARGUMENTO HIPERBÓLICO DEL COCIENTE. — Sea

$$\alpha = \rho\,(\cosh\theta + j\,\operatorname{senh}\theta) = a + bj\,,$$

un complejo hiperbólico no nulo ni divisor de cero; y multipliquémoslo por el complejo

$$\beta = \frac{1}{\rho}\,[\cosh(-\theta) + j\,\operatorname{sen}h\,(-\theta)]\,;$$

se tiene: $\alpha\beta = 1$, es decir

$$\frac{1}{\rho\,(\cosh\theta + j\,\operatorname{senh}\theta)} = \frac{1}{\rho}\,[\cos h\,(-\theta) + j\,\operatorname{senh}\,(-\theta)] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\,(\cosh\theta - j\,\operatorname{senh}\theta)\,.$$

Por tanto, *el inverso de un complejo hiperbólico no nulo ni divisor de cero, tiene por módulo hiperbólico* $\frac{1}{\rho}$, *y por argumento hiperbólico* $(-\theta)$.

El cociente de los dos complejos

$$\alpha = \rho\,(\cosh\theta + j\,\operatorname{senh}\theta)\quad,\quad \alpha' = \rho'\,(\cosh\theta' + j\,\operatorname{senh}\theta')$$

es por tanto

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \alpha\,.\,\frac{1}{\alpha'} = \rho\,(\cosh\theta + j\,\operatorname{senh}\theta)\,.\,\frac{1}{\rho'}\,(\cosh\theta' + j\,\operatorname{senh}\theta')$$

$$= \frac{\rho}{\rho'}\,[\cosh(\theta - \theta') + j\,\operatorname{senh}\,(\theta - \theta')]\,,$$

de donde resulta que: *el cociente de un complejo hiperbólico, por otro no nulo ni divisor de cero, tiene por módulo hiperbólico, el cociente de sus módulos hiperbólicos y por argumento hiperbólico, la diferencia de sus argumentos hiperbólicos.*

Al mismo resultado se llega operando con la forma

$$\rho\,(\operatorname{senh}\theta + j\cosh\theta)\,.$$

9. Extensión de la fórmula de Moivre. – Dado el complejo hiperbólico

$$\alpha = \rho\,(\cosh\theta + j\,\operatorname{senh}\theta)$$

la potencia α^n, n entero y positivo, es igual a

$$\alpha^n = \alpha.\alpha \ldots \alpha = \rho.\rho \ldots \rho\,[\cosh(\theta+\theta+\ldots+\theta) + j\,\operatorname{senh}(\theta+\theta+\ldots+\theta)]$$

es decir

$$[\rho\,(\cosh\theta + j\,\operatorname{senh}\theta)]^n = \rho^n\,[(\cosh(n\theta) + j\,\operatorname{senh}(n\theta)]$$

En el caso de exponente entero y negativo $n = -p$ con $p > 0$, se tiene:

$$\alpha^n = \frac{1}{\alpha^p} = \frac{1}{\rho^p\,(\cosh p\,\theta + j\,\operatorname{senh} p\,\theta)} =$$

$$= \rho^{-p}\,[\cosh(-p\,\theta) + j\,\operatorname{senh}(-h\,\theta)]$$

es decir

$$\alpha^n = \rho^n\,(\cosh n\theta + j\,\operatorname{senh} n\theta)\,.$$

La potencia α^n tiene por módulo hiperbólico ρ^n y como argumento hiperbólico $n\theta$

Al mismo resultado se llega, cuando el complejo es de la forma

$$\alpha = \rho\,(\operatorname{senh}\theta + j\,\operatorname{senh}\theta)\,.$$

10. La potencia e^z. – La potencia de exponente complejo $z = x + jy$, definiremos de modo que satisfaga a la propiedad fundamental expresada por la relación

$$e^z \times e^{z_1} = e^{z+z_1}\,.$$

Consideremos en primer lugar el caso de la potencia e^{yj} y pongamos

$$e^{yj} = \cosh y + j\,\operatorname{senh} y$$

Si multiplicamos por la potencia

$$e^{y'j} = \cosh y' + j\,\operatorname{senh} y'$$

resulta

$$e^{yj} \times e^{y'j} = \cosh(y+y') + j\,\operatorname{senh}(y+y') = e^{(y+y')j}$$

Además, si se quiere conservar las reglas del cálculo ordinario, la operación e^{x+jy} deberá significar el producto de e^x por e^{yj}. Por tanto

$$e^z = e^{x+yj} = e^x \,.\, e^{yj} = e^x\,(\cosh y + j\,\mathrm{senh}\, y)\ ;$$

la potencia e^{x+yj} *tiene por módulo hiperbólico* e^x *y por argumento hiperbólico* y.

Esta definición cumple con todas las reglas fundamentales de la potencia. En efecto:

$$e^z \times e^{z_1} = e^{x+yj} \times e^{x'+jy'} = e^x\,(\cosh y + j\,\mathrm{senh} y) \times e^{x'}\,(\cosh y' + j\,\mathrm{senh} y')$$

$$= e^{x+x'}\,[\cosh\,(y+y') + j\,\mathrm{senh}\,(y+y')] = e^{x+x'} \,.\, e^{(y+y')j} = e^{z+z_1}$$

Del mismo modo

$$e^0 = 1\ ,\ e^1 = e\ ,\ (e^z)^m = e^{mz}\ ,\ \frac{e^z}{e^{z_1}} = e^{z-z'}$$

La potencia e^z coincide con la exponencial e^x, cuando z se reduce a un número real x.

Se puede también, para definir la potencia e^z proceder de otro modo.

Dada la sucesión $\{\alpha_n = a_n + b_n\, j\}$ diremos que tiene por límite el número $\alpha = a + bj$, si a todo número arbitrario $\varepsilon > 0$, corresponde un entero p, tal que

$$|\ \alpha - \alpha_n\ | < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geq p\ .$$

De aquí se deduce que: *la condición necesaria y suficiente para que la sucesión* $\{\alpha_n\}$ *tenga por límite el número* α, *es que*

$$a_n \longrightarrow a \quad \text{y} \quad b_n \longrightarrow b\ .$$

Pongamos por definición

$$e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n .$$

Se tiene

$$1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{x + y\,j}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) + \frac{y}{n}\, j$$

y pasando a la forma isotropa, resulta

$$z = x + j\,y = z'\,j_1 + z''\,j_2 \quad , \quad z' = x + y \quad , \quad z'' = x - y$$

$$1 + \frac{z}{n} = \left(1 + \frac{z'}{n}\right) j_1 + \left(1 + \frac{z''}{n}\right) j_2$$

de donde

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{z'}{n}\right)^n j_1 + \left(1 + \frac{z''}{n}\right)^n j_2$$

y tomando límite para $n \to \infty$; se tiene finalmente

$$\boxed{e^z = e^{z'j_1 + z''j_2} = j_1\, e^{z'} + j_2\, e^{z''}\,,} \qquad [1]$$

expresión que nos define e^z en la forma isótropa.

De aquí se deduce, pasando a la forma normal que

$$e^z = \frac{1}{2}\,(e^{x+y} + e^{x-y}) + \frac{1}{2}\,(e^{x+y} - e^{x-y})\,j$$

$$= \frac{1}{2}\,[e^x\,(e^y + e^{-y}) + e^x\,(e^y - e^{-y})\,j]$$

es decir

$$e^z = e^{x+jy} = e^x\,(\cos h\ y + j\ \mathrm{sen} h\ y)\,.$$

que coincide con la expresión primera.

De la [1] se obtiene

$$e^z \times e^{z_1} = e^{z'j_1 + z''j_2} \times e^{z'_1 j_1 + z_1'' j_2} = (j_1\, e^{z'} + j_2\, e^{z''}) \times (j_1\, e^{z'_1} + j_2\, e^{z''_1})$$

$$= j_1\, e^{z'+z'_1} + j_2\, e^{z''+z''_1} = e^{(z'+z'_1)j_1 + (z'_1+z''_1)j_2} = e^{z+z'}\,.$$

Se puede también probar que la única función continua

$$f\,(z) = u\,(z) + j\,v\,(z)$$

de la variable compleja z, que satisface a la ecuación funcional

$$f\,(z_1)\,f\,(z_2) = f\,(z_1 + z_2)$$

donde z_1 y z_2 son dos valores cualesquiera de z, y que para *valores reales* de z ella tome valores reales, es la función

$$f\,(z) = a^z \qquad (a \text{ constante real})$$

En particular, la exponencial $f(z) = e^z$.

Podemos definir también la función e^z mediante la serie convergente

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Todas sus propiedades se deducen de las propiedades de estas series (1).

Según lo anterior resulta que:

$$a + bj = \rho\,(\cosh \varphi + \mathrm{j}\,\mathrm{sen}h\,\varphi) = \rho\, e^{j\varphi}$$

si $|a| > |b|$; en el caso de $|a| < |b|$ se tiene

$$a + bj = \rho\,(\mathrm{sen}h\,\varphi + j\cosh\varphi) = \rho\,.\,j\,e^{j\varphi}$$

11. Logaritmo neperiano.—Llamaremos *logaritmo neperiano* del complejo hiperbólico $\alpha = a + bj$, a todo número complejo hiperbólico z que verifique la igualdad

$$e^z = \alpha \qquad \alpha = a + bj\,,$$

Si

$$\alpha = \alpha' j_1 + \alpha'' j_2 \qquad \text{y} \qquad z = z' j_1 + z'' j_2$$

la igualdad anterior; se pude escribir

$$e^{z'j_1 + z''j_2} = \alpha' j_1 + \alpha'' j_2$$

es decir

$$j_1 e^{z'} + j_2 e^{z''} = \alpha' j_1 + \alpha'' j_2$$

de donde

$$e^{z'} = \alpha' \qquad \text{y} \qquad e^{z''} = \alpha''$$

Si los números reales α' y α'' *son positivos;* se tiene

$$z' = \log \alpha' \qquad \text{y} \qquad z'' = \log \alpha''$$

por tanto

$$\boxed{z = j_1 \log \alpha' + j_2 \log \alpha'' = \log (\alpha)}$$

Las condiicones $\alpha' > 0$, $\alpha'' > 0$, nos da

$$a + b > 0\,, \quad [1] \qquad a - b > 0 \qquad [2]$$

(1) Durañcna y Vignaux, *Loc. cit.* p. 242.

Sumando miembro a miembro las desigualdades [1] y [2] se obtiene

$$2a > 0, \qquad \text{es decir} \qquad a > 0 ;$$

por tanto

$$a > b \quad , \quad a > -b .$$

Las condiciones [1] y [2] equivale a

$$a > 0 \quad , \quad a > |\, b \,|$$

que corresponde a todos los puntos interiores del ángulo de vértice en $O(0,0)$, y lados $y = x$, $y = -x$, y que tienen al semi-eje positivo Ox.

Por tanto: *todo número complejo hiperbólico* $a + bj$, *tal que* $a > 0$, $a > |\, b \,|$, *tiene un logaritmo, determinado por la relación*

$$z = j_1 \log \alpha_1 + j_2 \log \alpha_2 = j_1 \log (a - b) + j_2 \log (a + b) .$$

Se puede llegar a este mismo resultado en otra forma. Sea

$$e^z = \alpha \quad , \quad z = x + j\,y \quad , \quad \alpha = \rho\,(\cosh \omega + j \operatorname{senh} \omega)$$

se tiene, entonces

$$e^x = \rho \quad , \quad y = \omega .$$

Si

$$\rho = \sqrt{a^2 - b^2} > 0 ,$$

la primera igualdad nos da

$$x = \log \rho ,$$

luego

$$z = \log \rho + j\,\omega .$$

La condición $\rho > 0$, implica todos los puntos del ángulo antes definido.

Las reglas del cálculo algebraico ordinario se extienden a los logaritmos de los números complejos hiperbólicos.

12. Extensión de la fórmula de Euler. — De la relación

$$e^{\omega j} = \cosh \omega + j \operatorname{senh} \omega$$

resulta

$$e^{-\omega j} = \cosh \omega - j \operatorname{senh} \omega .$$

Por tanto

$$\begin{cases} \cosh \omega = \dfrac{e^{\omega j} + e^{-\omega j}}{2} \\ \operatorname{senh} \omega = \dfrac{e^{\omega j} - e^{-\omega j}}{2j} \end{cases}$$

fórmulas análogas a las de Euler para el complejo ordinario.

13. Representación geométrica.–Fijado un sistema de coordenadas rectangulares x e y, representaremos el complejo hiperbólico $a + bj$, por un punto M (índice) de coordenadas (a, b).

Tomando como eje polar el eje Ox y como polo de origen O, si r y φ son las *coordenadas polares* del punto M; se tiene

$$a + bj = r\,(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)\ ;$$

por tanto, el módulo de $a + bj$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,$$

es la distancia euclideana del punto M al origen O, mientras que su argumento es el ángulo polar de dicho punto.

Cuando el complejo hiperbólico, es de la forma

$$\rho\,(\cosh \theta + j \operatorname{senh} \theta)\ ,$$

en este caso, el módulo hiperbólico: $\rho = \sqrt{a^2 - b^2}$ es la *distancia hiperbólica* del punto $M(a, b)$ al origen O, y el *argumento hiperbólico* φ son «*rotaciones hiperbólicas*» (1).

(1) J. C. Vignaux, *a*) «*Sobre el número complejo hiperbólico y su relación con la geometría de Borel.* (Contribución ... E. (1) 1935).

b) «*Sobre la forma factorial del número complejo hiperbólico*» Anales de la *Soc. Cient. Argentina* (1937).

(*Continuará*)

FUNDAMENTACIÓN AXIOMÁTICA DEL CÁLCULO VECTORIAL

POR

A. E. SAGASTUME BERRA — AGUSTIN DURAÑONA Y VEDIA

1. — El objeto de esta comunicación es dar un sistema de postulados que permiten desarrollar el cálculo vectorial en forma abstracta, y que difieren de los dados por J. v. Neumann [1]. La diferencia esencial entre ambos sistemas, está en que, en el que proponemos, no es necesario postular la existencia de los *multiplicadores*, sino que se deduce de las propiedades del grupo aditivo de los vectores y del producto escalar. Es, en cambio, necesario otro postulado, el IV (nos limitamos al caso de multiplicadores reales).

2. — El sistema de postulados es el siguiente:

Postulado I. — Existe un conjunto V de elementos $A, B, C, \ldots$, llamados *vectores*. El conjunto V, que llamamos *espacio vectorial*, es un *grupo abeliano* respecto a una operación $+$, la *suma* de vectores. Es decir, que se verifica:

I. 1. Cualesquiera sean los vectores A, B, existe el vector $C = A + B$;

I. 2. Es $(A + B) + C = A + (B + C)$;

I. 3. Es $A + B = B + A$;

I. 4. Existe un *vector nulo* o *cero*, O, tal que $A + O = A$, cualquiera sea A;

I. 5. Para cada A existe el *vector opuesto*, $-A$, tal que $(-A) + A = O$.

Postulado II. — A cada par de vectores A, B corresponde un número real a, el *producto escalar*, tal que:

[1] *Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlín, J. Springer.

II. 1. Cualesquiera sean los vectores A, B, existe el número real $a = A \times B$;

II. 2. Es $A \times B = B \times A$;

II. 3. El *cuadrado escalar* de cualquier vector A no es negativo: $A \times A = A^2 \geq O$.

POSTULADO III. — El producto escalar y la suma de vectores están ligados por las siguientes relaciones:

III. 1. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.

III. 2. Si $A^2 = O$, necesariamente A es el *vector nulo*: $A = O$.

POSTULADO IV. — Cualquiera sea el vector A, existe un vector B tal que $B + B = A$.

POSTULADO V. — Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ es una sucesión de vectores, y la sucesión numérica $(A_m - A_n)^2$ tiende a cero al crecer m, n, existe un vector A, el *límite* de la sucesión, tal que la sucesión numérica $(A_n - A)^2$ tiende a cero.

POSTULADO VI_n. — Existe al menos un sistema $U_1, \ldots, U_n$ de n vectores linealmente independientes (respecto al cuerpo de los números reales); $n + 1$ vectores son siempre dependientes.

3. — La *independencia* ordenada de estos postulados es fácil de demostrar, por el método usual de los *modelos*, en este caso conjuntos construídos artificialmente, en los que mediante definiciones *ad-hoc* de las operaciones se consigue que valgan todos los postulados que preceden a aquel cuya independencia se trata de demostrar, pero no este último.

Para el postulado I es conocida la demostración de la independencia. Para los postulados II, III y IV se pueden tomar como modelo los números enteros, ligados por las operaciones de suma ordinaria, y otra que represente el producto escalar, definida oportunamente; para II. 2 basta poner por ejemplo $A \times B = A^B$; para II. 3, $A \times B = -(AB)$; para III. 1, $A \times B = AB + n$ con $n > 0$ fijo; para IV $A \times B = A \,.\, B$. En cambio para III. 2 se puede recurrir a los complejos duales. Análogamente, la independencia de V y VI_n se demuestra fácilmente.

La *compatibilidad* de los axiomas se demuestra inmediatamente construyendo un modelo que satisfaga a todos, por ejemplo, el con-

junto de complejos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ siendo las a_i números reales, y estableciendo las definiciones

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

y

$$(a_1, \ldots, a_n) \times (b_1, \ldots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = a.$$

4. — Del postulado I resulta la posibilidad de definir los *multiplicadores enteros* de los vectores, definiendo, para m entero positivo:

$$m A = A + A + \ldots + A \ (m \text{ veces}) \ ; 0 A = 0 \ ; (-m) A = -(m A),$$

y resulta así la posibilidad de operar con estos múltiplos, en las sumas y productos escalares, como es corriente.

La importante *desigualdad de Schwarz*

$$(A \times B)^2 \leq A^2 . B^2$$

y sus consecuencias

$$| A + B | \leq | A | + | B | \quad , \quad | A - B | \geq | | A | - | B | |$$

donde el *módulo* $| A |$ de un vector A está definido por

$$| A | = + \sqrt{A^2}$$

se demuestran haciendo uso sólo de los tres primeros postulados.

El postulado IV permite, en combinación con lo anterior, operar con multiplicadores de la forma $\frac{m}{2^k}$ (m, k enteros), y como el conjunto de estos números es denso en el campo real, el postulado de la continuidad, V nos lleva a los multiplicadores reales cualesquiera.

A partir de aquí se define la dependencia lineal como de costumbre, y el postulado VI_n nos define la dimensionalidad que atribuímos al espacio vectorial V. Se pueden entonces definir todos los conceptos del cálculo vectorial, y demostrar todos los teoremas, extendidos al espacio n-dimensional. Las *orientaciones* de las n-uplas de vectores independientes (ortogonales o no) se definen por comparación con una fija, y permiten definir luego el producto *mixto* de n vectores, y el producto *vectorial* de $n - 1$ vectores, con propiedades que generalizan las ordinarias.

UNA NUEVA FORMA DE INTRODUCIR LA TEMPERATURA

POR

ENRIQUE LOEDEL PALUMBO Y ERNESTO R. SABATO

Introducción. — Se sabe que toda definición de la temperatura comprende, parcial o totalmente, al segundo principio de la termodinámica. — Según esto, la temperatura debería ser introducida, solamente después de haber enunciado los dos primeros principios de la teoría del calor, lo que, sin embargo, no se hace, debido a que, seguramente, parece imposible definir y medir cantidades de calor, encontrar la equivalencia del mismo con el trabajo, definir transformaciones adiabáticas e isotermas y enunciar el segundo principio, sin la ayuda de un termómetro cualquiera. En lo que sigue trataremos de probar que, a pesar de ello y de otras dificultades que en un principio parecen infranqueables, es posible un desarrollo lógico y consecuente de la termodinámica, introduciendo la temperatura sólo después de haber enunciado los dos primeros principios; y se verá además que este camino es mucho más económico que el que se sigue corrientemente.

Cantidad de calor. — Si se tiene una masa de hielo en contacto con agua proveniente de su fusión a la presión normal, que supondremos constante, diremos que ese sistema está aislado y en equilibrio cuando se mantenga invariable la relación entre las masas de hielo y agua.

Si el sistema pasa de un estado de quilibrio a otro en el cual la masa de agua aumenta por ejemplo en m (disminuyendo en consecuencia la masa de hielo) diremos que el sistema ha recibido una cierta « *cantidad de calor* » Q que supondremos proporcional a m:

$$Q = C\,m$$

La constante C depende únicamente de las unidades que se elijan.

Equivalencia de trabajo en calor. — Si se hace girar una rueda de paletas en el interior del calorímetro de hielo se constata que existe rigurosa proporcionalidad entre el trabajo entregado y la masa de hielo fundida por este procedimiento. Concluímos que el trabajo se ha convertido o transformado en calor. Siendo el trabajo A, y el calor que él produce Q, eligiendo en forma conveniente las unidades se podrá escribir:

$$A = Q$$

Primer principio. — Sea un sistema « aislado »; esto es que no intercambia calor ni ninguna otra forma de energía con el exterior.

Llamemos U a la energía total de tal sistema. Si ese sistema recibe del exterior la cantidad de calor Q, y el trabajo A, su energía interna final U_2, será mayor que su energía inicial U_1, siendo:

$$U_2 - U_1 = Q + A \qquad [1]$$

Medidas de cantidades de calor. — *a) Calentamiento a presión constante.* — Sea un cuerpo que a presión constante (por ejemplo la atmosférica) pase de un estado en que su volumen es V_1 a otro en el cual el volumen es V_2, por la acción de eso que llamamos calor.

La [1] nos da en este caso:

$$U_2 - U_1 = Q_{2,1} + P\,(V_2 - V_1)$$

Llamando $Q_{2,1}$ al calor puesto en juego y que deseamos medir.

Si, conservando la presión constante, llevamos al cuerpo de los estados [1] y [2] al calorímetro de hielo en el cual supondremos que tiene un volumen V_0 y una energía U_0 tendremos:

$$U_1 - U_0 = Q_{1,0} + P\,(V_1 - V_0)$$

y

$$U_2 - U_0 = Q_{2,0} + P\,(V_2 - V_0)$$

de donde

$$U_2 - U_1 = Q_{2,0} - Q_{1,0} + P\,(V_2 - V_1)$$

con lo cual

$$Q_{2,1} = Q_{2,0} - Q_{1,0} \qquad [2]$$

donde $Q_{2,0}$ y $Q_{1,0}$ se miden directamente con el calorímetro.

Calentamiento a volumen constante. — En este caso, se demuestra también de inmediato, que se puede aplicar la [2] para medir el calor puesto en juego. Se comprende también que la [2] podrá aplicarse aún en aquellos casos en que se cumpla:

$$A_{2,1} + A_{0,2} + A_{1,0} = 0$$

Siempre que

$$A_{i,k} = -A_{ki} \qquad [1]$$

representando por $A_{2,1}$, el trabajo recibido por el cuerpo, o sistema, del exterior, en su pasaje del estado 1 al 2.

Transformación inversa del calor en trabajo

Definiciones. — Llamaremos *fuente térmica* o simplemente fuente a un cuerpo o sistema de cuerpos capaces de intercambiar calor con otros cuerpos.

Denominaremos *máquina térmica* a un mecanismo de funcionamiento periódico capaz de transformar calor en trabajo.

Diremos que una máquina funciona « entre » las fuentes A, B, C, etc., cuando al cabo de cada período haya extraído o entregado algo de calor a las mismas.

Se dirá que dos cuerpos o dos fuentes se ponen en *contacto térmico* duando se haga posible por cualquier procedimiento el pasaje de calor de uno al otro.

Sean, por ejemplo, dos fuentes de calor constituidas la una por vapores de agua en ebullición a la presión normal, fuente F_1, y la otra por hielo en fusión también a la presión normal fuente F_2. Un cuerpo cualquiera, hierro, por ejemplo, que no reaccione químicamente con las substancias de las fuentes y que se lleve sucesivamente de una a la otra puede establecer entre ellas un contacto térmico. Se constataría en este caso que por intermedio del hierro transportamos calor de F_1 a F_2.

Eentre esas fuentes será posible hacer funcionar una máquina térmica, la cual podría estar constituída simplemente por una varilla metálica o por un cilindro provisto de un pistón que contiene en su interior un líquido o un gas y que se lleva sucesivamente de una a otra fuente.

Las variaciones de longitud de la varilla o del volumen de la substancia contenida en el cilindro experimentadas al pasar de una a

otra fuente podrán aprovecharse para levantar pesas a cierta altura. La suma del calor entregado por la máquina a la fuente F_2, más el trabajo realizado, dará el calor sacado de F_1.

Segundo principio. — Lo enunciaremos así: *Es condición necesaria y suficiente para el funcionamiento de una máquina térmica entre dos fuentes A y B, que se establezca entre ambas, al ponerlas en contacto térmico, un pasaje de calor de una a la otra.*

Temperaturas iguales. — Diremos que dos cuerpos están a igual temperatura cuando puestos en contacto térmico no pasa calor del uno al otro.

Fuente térmicamente homogénea. — Es aquella que tiene todas sus partes a igual temperatura. En adelante, al hablar de fuentes térmicas, consideraremos únicamente fuentes homogéneas (1).

Podría pensarse que el solo hecho de admitir la existencia de fuentes térmicamente homogéneas implica la admisión de la propiedad transitiva de la igualdad de temperatura, ya que si consideramos una fuente de esa clase y la suponemos dividida en tres partes A, B, C, deberá cumplirse que $T_A = T_B$; $T_B = T_C$, y también que $T_A = T_C$, pues si esta última igualdad no se cumpliera pasaría calor de A a C, o de C a A aún cuando no pasara de A a B ni de B a C.

Pero si se trata de una fuente física y químicamente homogénea en todas sus partes la propiedad anterior es algo completamente trivial, mientras que la propiedad transitiva de la igualdad de temperatura se refiere a substancias cualesquiera, y es en este caso que aquella propiedad constituye un hecho físico de singular importancia y que en sí mismo no tiene ni mayor ni menor evidencia que el enunciado mismo del segndo principio. Si un trozo de hierro no intercambia calor con cierta porción de agua y ésta no intercambia calor con otra porción de mercurio, se trata de probar que el trozo de hierro tampoco intercambiará calor con el mercurio (*).

Del enunciado del segundo principio y de la definición de temperaturas iguales se desprende que es imposible el funcionamiento de una máquina térmica que no haga otra cosa al cabo de cada período

(1) Si tales fuentes « homogéneas » pueden realmente existir, es una cuestión que no interesa por el momento.

(*) Piénsese, por ejemplo, en el caso del equilibrio eléctrico, donde la propiedad transitiva no vale; pues una barra de Zn y otra de Cu están en equilibrio eléctrico con una solución de ácido sulfúrico sin estar en equilibrio entre sí.

que sacar calor de una única fuente (térmicamente homogénea) y produzca trabajo.

Temperatura mayor y menor. — Si una máquina funciona entre dos fuentes F_1 y F_2, deberá extraer calor de una de ellas y entregar parte del mismo a la otra transformando la diferencia en trabajo. No pudiendo la máquina funcionar sacando calor de una única fuente tampoco podrá funcionar sacando calor de las dos, pues si así lo hiciera, bastaría transformar parte del trabajo de la máquina en el calor que ella ha sacado de una de las fuentes y restituirlo a la misma, con lo cual se tendría así una máquina que funciona con una única fuente. Diremos que la fuente de la cual la máquina extrae calor tiene temperatura mayor que la otra.

En particular, si la máquina extrae calor de F_1, y entrega calor a F_2, siendo T_1 y T_2, las temperaturas respectivas de las fuentes, diremos que

$$T_1 > T_2$$

Para que esta definición tenga sentido es necesario probar que cualquier máquina que funcione entre las mismas fuentes sacará calor de F_1 y entregará parte del mismo a F_2. En efecto: Si suponemos que entre las mismas fuentes una segunda máquina funcionara sacando calor de F_2, y entregando parte a F_1, bastaría hacer que el calor que sacara de F_2, igualara al entregado por la primera para tener una máquina que funcionara con una sola fuente.

Si la máquina no entrega trabajo al exterior se convierte en un cuerpo que pasa periódicamente de F_1 a F_2, estableciendo así un simple contacto térmico entre ambas transportando calor de una a la otra.

Que este pasaje de calor es irreversible se prueba de inmediato, pues si así no fuera se podría hacer que una máquina funcionara con una única fuente.

Luego al poner las fuentes F_3 y F_2 en contacto, pasará calor de F_1 a F_2, y no en sentido inverso.

Por lo tanto un *cuerpo cualquiera* que pase sucesivamente de F_1 a F_2, transportará calor de la primera a la segunda fuente.

Sea ahora una tercera fuente F_3, cuya temperatura T_3, sea tal que

$$T_2 > T_3$$

o sea una máquina que funcionando entre F_2 y F_3, saca calor de F_2 y entrega calor a F_3. Se trata de probar que deberá ser:

$$T_1 > T_3 .$$

En efecto: La máquina que funciona entre F_2 y F_3, puede sacar de F_2, el calor entregado por la primera máquina (que funciona entre F_1 y F_2), con lo cual se tiene una máquina que saca calor de F_2 y entrega parte del mismo a F_3, con lo que queda probada la última desigualdad.

Carácter transitivo de la igualdad de temperatura. — Probemos primero que si

$$T_1 > T_2$$

y

$$T_2 = T_3$$

deberá ser

$$T_1 > T_3$$

o sea: pasa calor de F_1 a F_2, y no pasa de F_2 a F_3. Se trata de probar que deberá pasar de F_1 a F_3. Consideremos a F_3 como un cuerpo que no intercambia calor con F_2. Si lo llevamos a F_1, y luego lo traemos *nuecamente* a F_2 deberá transportar calor de F_1 a F_2, para lo cual deberá absorber calor al estar en contacto con F_1. Luego si pasa calor de F_1 a F_3 queda probada la última desigualdad.

Sean ahora las fuentes F_1, F_2 y F_3 tales que

$$T_1 = T_2 \quad \text{y} \quad T_2 = T_3$$

se trata de probar que

$$T_1 = T_3$$

Si fuera $T_1 \gtrless T_3$, o sea si F_1 intercambiara calor con F_3, por lo probado más arriba debería ser también $T_1 \gtrless T_2$, lo que contradice lo supuesto, pues se ha admitido que F_2 y F_1 no intercambiaban calor al ponerse en contacto.

Ordenamiento de las temperaturas. — Termoscopio. — Por la definición dada de cantidad de calor y de temperatura mayor y menor será fácil saber qué cuerpos tienen temperatura mayor o menor que la temperatura del hielo en fusión. Los cuerpos que al ponerse

en contacto con el calorímetro de hielo hagan fundir hielo estarán a temperatura mayor; los que provocan la congelación del agua, a temperatura menor, y los que no alteren el equilibrio, a temperatura igual.

Sean ahora dos fuentes térmicas F_1 y F_2, cuyas temperaturas T_1 y T_2 sean ambas mayores que la temperatura T_0 del hielo en fusión (F_0). Se trata de poder decidir experimentalmente si $T_1 \lesseqgtr T_2$.

Tomemos un cuerpo cualquiera C, un trozo de hierro, por ejemplo, y dejémosle un cierto tiempo t en contacto con F_1. Llevémosle luego al calorímetro de hielo y midamos el calor transportado Q. Esta cantidad de calor depende del tiempo t en que el cuerpo C permanece en contacto con F_1. Pero se observa que a partir de un cierto intervalo de tiempo t_0 la cantidad de calor transportada por C se hace constante. Decimos entonces que a partir de t_0 se ha establecido el equilibrio térmico, pues a partir de ese momento el cuerpo no absorbe ni entrega calor a la fuente F_1. Luego, en ciertas condiciones, para un intervalo de contacto igual o mayor que t_0, entre C y F_1, las temperaturas de C y F_1 se igualan.

Llamemos Q_1 a la cantidad de calor que transporta entonces el cuerpo C al pasar de F_1 a F_0.

Sea Q_2 el calor transportado por el mismo cuerpo C de F_2 a F_0 habiendo alcanzado el equilibrio térmico con F_2. Todas estas operaciones suponemos que se realizan a presión constante. (Ver pág. 272).

Si fuera

$$Q_1 > Q_2$$

querrá decir que el cuerpo C al pasar de F_1 a F_2 y alcanzar las temperaturas T_1 y T_2 cede el calor

$$Q_1 - Q_2$$

a la fuente F_2, por lo cual si pasa calor de F_1 a F_2 deberá ser

$$T_1 > T_2$$

Se tiene así un medio para poder realizar un ordenamiento de las temperaturas [1].

[1] Si no nos referimos a los estados de equilibrio de C, con F_1 y F_2, lo que compararíamos serían las temperaturas T_1' y T_2' de C antes de su introducción en el calorímetro.

Se constata además que el volumen de C no varía una vez establecido el equilibrio térmico. Además para la mayoría de las substancias se cumple, llamando V_1 y V_2 a los volúmenes que adquieren estando en equilibrio con las fuentes F_1 y F_2 para las cuales es $T_1 > T_2$ que $V_1 > V_2$ o sea que el volumen es una cierta función creciente de la temperatura.

En esto se basan los termómetros comunes de escala arbitraria y que quizá conviniera llamar simplemente termoscopios.

Podría pensarse que este ordenamiento pudo ya haberse hecho antes de enunciar el segundo principio, pero no es así, puesto que, si haciendo la experiencia con hierro resulta $T_1 > T_2$, habría que probar que con cualquier otra substancia se conserva el signo de la desigualdad (o de la igualdad), lo que es consecuencia del segundo principio.

Definicion de temperatura

Máquina reversible. — Sea una máquina que funciona entre F_1 y F_2 extrayendo de F_1 el calor Q_1, entregando a F_2 el calor Q_2, y transformando en trabajo la diferencia $Q_1 - Q_2 = A$. Si dicha máquina puede funcionar en sentido inverso recibiendo del esterior el trabajo A, sacando de F_2, Q_2 y entregando Q_1 a F_1 diremos que es reversible.

Llamaremos rendimiento a la relación

$$\rho = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Del segundo principio se desprende de inmediato que dicho rendimiento es máximo para una máquina reversible y que no depende de la naturaleza de la misma. Por lo tanto otra máquina reversible que funcionara entre las mismas fuentes intercambiando con ellas los calores Q'_1 y Q'_2 deberá dar el mismo rendimiento que la anterior, de donde resulta que

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q_1'}{Q_2'}$$

Esta relación constante no depende de la máquina (de su substancia); depende únicamente de las fuentes, y diremos que es igual a la relación de sus temperaturas:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{o sea} \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

Si $T_1 = T_2$ será $Q_1 = Q_2$, el rendimiento será nulo, lo que significa que ninguna máquina podrá funcionar entre esas fuentes en ese caso, lo que corresponde a la definición de igualdad que ya habíamos dado.

Si $T_1 > T_2$, $Q_1 > Q_2$ o sea se saca calor de F_1 y se entrega a F_2, de acuerdo a la definición anterior de temperatura mayor y menor.

Siendo la conducción del calor irreversible, así como también la producción de calor por roce o la expansión de un gas sin producción de trabajo como se demuestra fácilmente apoyándose en el segundo principio, se deduce que en una máquina reversible no deben efectuarse ninguno de los procesos anteriores. Su funcionamiento tendría que consistir en la sucesión de estados de equilibrio, y no siendo posible la conducción del calor, las únicas transformaciones admisibles serían las efectuadas a temperatura constante (isotermas) y aquellas en que no se intercambie calor con el exterior (adiabáticas). En una palabra, la máquina debe recorrer el conocido ciclo de Carnot.

Termómetros de gas. — Sea una substancia cuya presión p por cierta función de su volumen $f(v)$ se mantiene constante si la temperatura no varía:

$$p f(v) = C$$

Dependiendo C únicamente de la temperatura. Si una substancia de esta clase existiera, la validez de la ley anterior se podría verificar con un simple termoscopio. Si es $F(v) = V$, se trataría de la ley de Mariotte. Supongamos además que la energía interna U es función únicamente de la temperatura (Ley de Joule), ley que también podría verificarse, si alguna substancia la cumpliera, con un termoscopio.

Hagamos recorrer a la substancia un ciclo de Carnot entre las isotermas T y T_0. Sean los calores respectivos Q y Q_0, y los volúmenes extremos de cada isoterma V' y V para la primera y V_0' y V_0 para la segunda.

Sea además C_0 el valor de la constante correspondiente a T_0. Se tendrá:

$$Q = \int_v^{v'} p\, dv = C \int_v^{v'} \frac{dv}{f(v)} = C F(v' v)$$

y análogamente

$$Q_0 = C_0 F(v_0' v_0)$$

De acuerdo a la definición de temperatura deberá ser:

$$\frac{C\,F\,(v'\,v)}{C_0\,F\,(v_0'\,v_0)} = \frac{T}{T_0}$$

o sea

$$\frac{C}{T}\,F\,(v'\,v) = \frac{C_0}{T_0}\,F\,(v_0'\,v)$$

es decir que esta expresión debe ser independiente de la temperatura T, para lo cual deberá ser

$$C = R\,T$$

Siendo R una constante.

De aquí

$$p\,f\,(v) = R\,T$$

o sea, manteniendo constante el volumen resulta ser la presión proporcional a la temperatura. Se tendría así un medio de medir T si existiera una substancia que cumpliera con la ley de Mariotte y con la ley de Joule.

Reducción de una escala arbitraria. — Consideremos un ciclo de Carnot infinitamente pequeño que en el plano de las presiones y los volúmenes rodea al punto p, v, T.

Sea dT la diferencia de temperatura entre las dos isotermas, diferencia que en la escala arbitraria corresponde a un dt. El rendimiento será $\frac{dT}{T}$ igual al área del ciclo $dp\,.\,dv$ sobre el calor total absorbido de la fuente a temperatura mayor ΔQ. Es:

$$\Delta\,Q = p\,d\,v + \left(\frac{\partial\,U}{\partial\,v}\right)_T d\,v$$

de donde

$$\frac{dT}{T} = \frac{d\,p}{p + \left(\frac{\partial U}{\partial\,v}\right)_T}$$

Aquí dp es la variación de presión entre la isoterma T y la otra de temperatura $T + dT$ para el volumen v, que corresponde en la escala arbitraria a las isotermas t y $t + dt$. Luego será

$$d\,p = \left(\frac{\partial\,p}{\partial\,t}\right)_v dt = \beta\,dt$$

Sustituyendo e integrando entre t_0 y t o sea entre T_0 y T se tiene la conocida fórmula de Lord Kelvin:

$$ln \frac{T}{T_0} = \int_{t_0}^{t} \frac{\beta}{p + \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_t} dt$$

Si transcribimos aquí esta fórmula es porque en los tratados recién se llega a ella, por lo general, después de haber demostrado el teorema de Clausius y haber introducido la entropía en cuya expresión aparecen los calores específicos, que creemos sería más lógico introducir recién después de haber definido exactamente lo que se entiende por temperatura.

Nos es grato agradecer aquí las interesantes observaciones de los profesores R. G. Loyarte y E. Terradas con motivo de este trabajo (1).

(1) Cuando este trabajo fué sometido a la opinión del profesor E. TERRADAS nos observó que G. H. BRYAN, en su monografía *Allgemeine Gründlegung der Thermodynamik* (1903), en la *Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften* (V. Band) seguía un camino más o menos análogo al propuesto por nosotros.

Consultado que fué ese trabajo, que hasta entonces desconocíamos, constatamos que, en efecto, trata BRYAN de introducir la temperatura sólo después de enunciar el segundo principio.

Para lograr esto convierte el principio de equivalencia en una definición de la cantidad de calor quedando así reducido aquel principio a una simple tautología. Pero ésta no sería, sin embargo, la objeción más seria que pudiera hacerse del trabajo de BRYAN. En él, estando definida la cantidad de calor por el trabajo capaz de producirla, aparte de no poder verificar experimentalmente el principio de equivalencia, se hace imposible, aún teóricamente, distinguir calor de trabajo, y no se tiene, en consecuencia, derecho alguno de hablar, por ejemplo, de transformaciones adiabáticas de un sistema (que no intercambian calor) y que reciben o entregan cierto trabajo.

Las mismas medidas experimentales del equivalente mecánico del calor se convierten así en simples medidas del calor específico del agua y es indispensable adoptar como equivalente la unidad.

Además el segundo principio lo enuncia en la conocida forma de Clausius en la cual interviene la noción de temperatura.

No insistimos en otras observaciones de segundo orden que a nuestro juicio también contribuyen a no hacer aceptable el desarrollo de G. H. BRYAN.

LA UROBILINA EN LA IDENTIFICACIÓN DE ÍNFIMAS CANTIDADES DE COBRE Y DE MERCURIO

POR

CARLOS A. SAGASTUME Y VIRGILIO OLIVA

La urobilina reacciona con las sales de mercurio y de cobre, formando un complejo que en soluciones muy diluídas presenta color rosa, que, por aumento de la concentración, se intensifica hasta el púrpura.

En lo que respecta a las sales cúpricas, esta reacción coloreada ya había sido aplicada por Studenski (1) en 1893 para investigar urobilina urinaria.

En 1930 Emmerie (2) usa esa reacción en la microdeterminación del cobre para cantidades de este metal que oscilan entre 0.01 y 0,0001 miligramos en soluciones amoniacales. Hace notar este autor que el mercurio produce la misma reacción, inconveniente que él elude precipitando este catión por ioduro de potasio. Recientemente (1936) Bertrand y Saint-Rat (3) presentan a la Academie des Sciences de Paris, una nota titulada: « Sobre una nueva reacción coloreada del cobre y de la urobilina ».

Es evidente que estos investigadores desconocían los trabajos anteriores, y de ahí que después de referirse al ferrocianuro de potasio y a la formaldoxima para reconocimiento del cobre en soluciones acuosas muy diluídas, expresen textualmente: « Nosotros hemos descubierto y estudiado un reactivo superior a los precedentes a la vez por su especificidad, su sensibilidad y la facilidad de su empleo: es la urobilina en solución al milésimo en alcohol a 60° ».

En punto a sensibilidad del reactivo expresan Bertrand y Saint-Rat que es capaz de acusar ínfimas contidades de ion cúprico (0,0001 miligramo) y en punto a especificidad afirman que lo han ensayado con sulfatos y cloruros de gran número de metales sin observar coloración con otra sal que la de cobre, pués en las soluciones

de zinc aparece fluorescencia verde, pero sin coloración del líquido. « La reacción dada por la urobilina es, pués, muy característica para las sales de cobre », afirman los autores, sin aludir para nada al mercurio.

Nosotros estamos realizando actualmente un trabajo con el propósito de resolver en forma práctica el problema de la evaluación por vía colorimétrica de la urobilina en diferentes líquidos del organismo. Aprovechamos para ese objeto la propiedad de dicho pigmento de reaccionar con el cobre, a la que nos hemos referido.

A poco de iniciar nuestros ensayos experimentales advertimos que el mercurio acusa también la misma coloración y en forma extremadamente sensible. Esto nos indujo a llamar la atención de quienes trabajan en química analítica, para que no incurran en el error de acordar a la reacción urobilina-cobre, la especificidad que le asignan Bertrand y Saint-Rat.

Por lo que concierne a la reacción entre la urobilina y el mercurio, Schmidt (4) (1900), Triboulet (5) (1909) y Goiffon (6) (1920) la emplean para caracterizar el pigmento en materias fecales.

Ateniéndonos a nuestras experiencias con soluciones de sales mercñricas puras, opinamos que a los reactivos de que se sirve la química analítica para caracterizar el ion mercurio, se puede agregar la urobilina como muy sensible, pero siempre que se opere en ausencia de cobre.

Hemos obtenido la urobilina siguiendo la técnica de Watson (7). Preparamos una solución alcohólica al 1 en 10.000 y por otra parte sendas soluciones de cloruro y sulfato mercúrico en agua destilada. Observamos que al agregar el reactivo a la solución diluída de mercurio, se obtiene una coloración rosada que, según la dilución, se produce inmediatamente o después de algunos segundos.

La reacción es sensible para denunciar miligr. 0,001 de mercurio.

Con un exceso de urobilina, la coloración es tanto más intensa cuanto mayor es la concentración de mercurio.

En presencia de un exceso de mercurio, la coloración es proporcional a la cantidad de urobilina.

Hemos introducido una pequeña, pero ventajosa, modificación en la técnica de Bertrand y Saint-Rat para el cobre y que puede servir también para el mercurio.

Basándonos en la gran solubilidad en cloroformo de los complejos urobilina-cobre y urobilina-mercurio, hemos comprobado que se pueden extraer de la solución acuosa, y de este modo concentrar, intensificar y tornar más nítida la coloración. Aconsejamos proceder

en la siguiente forma: a 0,5 cm³ de solución acuosa de sal mercúrica diluída, medidos en tubito muy estrecho, añadir 0,15 cm³ de urobilina al 1/10.000 en alcohol. En otro tubito igual que servirá de control, se vierten 0,5 cm³ de agua destilada y 0,15 cm³ de urobilina. Una vez aparecido el tinte rosado, se sigue agregando urobilina a ambos tubos hasta que se observe que se torna naranja debido a que el color amarillo del pigmento afecta el rosa de la reacción. A cada uno de los tubitos se añade 0,1 cm³ de cloroformo, se agita y después se abandona al reposo. En la capa clorofórmica se aprecia mucho mejor el color rosa de la reacción.

Los ensayos experimentales efectuados hasta este momento, nos autorizan a afirmar:

1° Las sales de mercurio en solución al 1/100.000 o sea en cantidades de mgr. 0,001 producen la misma reacción que el cobre, frente a la urobilina.

2° En ausencia de cobre, se puede usar la urobilina como reactivo muy sensible para la caracterización del mercurio.

3° Para sensibilizar la reacción, es aconsejable extraer con cloroformo el complejo coloreado.

BIBLIOGRAFÍA

(1) Studenski. Petsburg. *Med. Wochen.* 1893, p. 283, in *Chem. Zentralbl.* 1893, II, 668.
(2) Emmerie, A. *Chemical Weekblad*, 1930, 27, 552, in *Brit. Chem. Abstr.*, 1930, p. 1393.
(3) Bertrand, G., y Saint-Rat, L. *C. R. As. Sc.*, 1936, 203, 140.
(4) Schmidt. *Zeitsch. Prakt. Chem.*, 1900, p. 201.
(5) Triboulet. *C. R. Soc. Biol.*, 1909, p. 394.
(6) Goiffon. *C. R. Soc. Biol.*, 1920, p. 344.
(7) Watson, C. *Journ. Physiol. Chem.*, 1935, 233, 39.

HESPERIOIDEA ARGENTINA IX

POR

KENNETH J. HAYWARD
F.R.E.S., F.R.G.S., F.Z.S.

Con la preparación de este trabajo, se termina el estudio del material de Hespéridos argentinos conocidos hasta la fecha. Hay todavía ocho especies sin clasificar, todas representadas en mi colección por una sola hembra (algunas de éstas son nuevas para la ciencia), pero hasta tanto no se encuentren los machos correspondientes, será imposible describirlas.

Poco pensaba al iniciar esta revisación, en enero de 1932, que el trabajo me costaría seis años, durante los cuales ha sido necesario estudiar 400 especies de cerca de 140 géneros y describir más de 90 especies nuevas.

En adelante tenemos que esperar muchos cambios en la nomenclatura y, especialmente, en la posición genérica de ciertos insectos. Por el hecho de que el Brig. Gen. W. H. Evans, del Museo Británico, está trabajando en una revisación general de los Hespéridos americanos, he refrenado en lo posible la creación de nuevos géneros, colocando las especies, cuando he tenido necesidad, en el género viejo más próximo.

Aunque 400 especies parece un número muy elevado, no tengo la menor duda de que esta cifra aumentará anualmente por muchos años, especialmente si los coleccionistas se dedican un poco más a cazar los representantes de esta familia, especialmente las especies chicas y de colores oscuros.

No puedo dejar pasar esta oportunidad sin agradecer sinceramente a las siguientes personas, quienes han facilitado mi tarea en una forma u otra: Prof. Martín Doello-Jurado, por haber puesto a mi disposición la colección nacional de hespéridos, y don Carlos Rusconi la del Museo de Historia Natural de Mendoza; y a los señores Alberto Breyer, Fernando Bourquin, Pablo Köhler y otros por el préstamo de colecciones y material de estudio.

A las comisiones directivas de la Sociedad Entomológica Argentina (1932-38) y de la Sociedad Científica Argentina (1935-38), por haber publicado con la mínima demora unas 450 páginas de texto y láminas. Al Sr. Emilio Gemignani por haber en varias ocasiones prestado su ayuda en buscar referencias en la biblioteca del Museo y por otras cortesías. Especialmente tengo que agradecer a mis amigos Capt. N. D. Riley y Gral. Evans del Museo Británico y Sr. Ernesto Bell de Nueva York, por haberme ayudado mucho en clasificar ciertos insectos y, además, proporcionado otros datos de interés y utilidad.

Goniurus proteus L.

Una nueva procedencia para este insecto es la provincia de Salta (Köhler).

Goniurus dorantes Stoll.

Conocido ahora de Corrientes (Alberto Breyer).

Goniurus simplicius Stoll.

Nuevas procedencias son Corrientes (Alberto Breyer), Buenos Aires y Chaco.

Paches geometrinus Fldr.

Nueva procedencia: Corrientes (Alberto Breyer).

FIG. 1. — Genitalia de *Milanion leucaspis* Mabille. (Válvula y aedoeagus).

Milanion leucaspis Mabille. (Fig. 1).

1878. Mabille, Pet. Nouv. Ent., p. 230.

Difiere de *hemes* Cr. (ver Hayward, *Rev. Soc. Ent. Arg.* 5: 237, 1933), por tener la mancha blanca del ala posterior mucho más

ancha (siendo el borde oscuro del ala angosto) y el abdomen negro.

Patria. — Brasil y de Corrientes en la Argentina.

Pholisora minor (Schaus). (Fig. 2).

1902. *Staphylus minor* Schaus, Proc. U. S. Nat. Mus., p. 432.
1923. *Staphylus minor* Draudt in Seitz Macrolep. 5: 905.
1925. *Pholisora minor* Lindsey, Denison Univ. Bull. 21: 86, pl. 25, fig. 10, & pl. 27, fig. 5 (genitalia).
1936. *Staphylus minor* Kivirikko, Ann. Ent. Fennici 2, (2): 61.

Expansión alar 22 mm.

Pardo negruzco con un tono muy ligeramente purpúreo, el único diseño que se puede apreciar en los ejemplares a la vista siendo

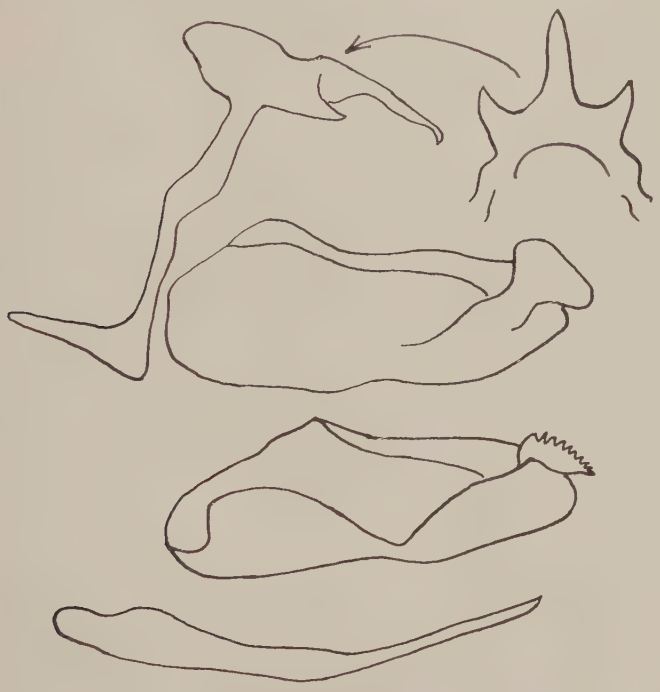

FIG. 2. — Genitalia de *Pholisora minor* (Schaus).

una fina línea algo amarillenta, antemarginal, en la faz superior; en el ala anterior, esta línea apenas visible.

La faz inferior algo más clara y sin diseño.

Traté de este insecto en mi *Hesperioidea Argentina* III (inéd.), como dudoso para la fauna argentina (Misiones, Kivirikko).

Patria. — Perú (Schaus), Colombia, Perú, Bolivia (Bell) y en la Argentina de Tucumán en mi colección. !

Pholisora tucumanus (Plötz).

Staphylus fascia Hayward (*Rev. Soc. Ent. Arg.* 5, (24): 245, lám. 26, fig. 11 y lám. 22, fig. 3 (genitalia), 1933), *Pholisora fascia* (Hayward), (*Rev. Chil. de Hist. Nat.* 40: 276, lám. 19, fig. 2 (genitalia) 1936), es un sinónimo.

Gorgythion pyralina Mschlr.

Nueva procedencia: la provincia de Corrientes (Breyer).

Género *Dardarina* Evans.

En *An. Soc. Cient. Arg.* 125: 224, el nombre de este género está equivocadamente escrito como *Dardarinia.*

Género *Yvretta* Hemming.

1900. *Chaerephon* Godman, Biol. Centr. Amer. Rhop. 2: 474 (nom. praeoc.).
1935. *Yvretta* Hemming, Stylops 4:3 (nom. nov.).

Antenas la mitad del largo de la costa y con una corta maza, el ápice puntiagudo y de forma de gancho. Artejo final de los palpos corto y algo erguido. Apice del ala posterior agudo en los machos y más obtuso en las hembras. Tibias de las patas medianas y traseras espinosas, tibias traseras con dos pares de espolones. El estigma del macho está ausente en algunas especies, en otras consiste de una fina línea entre el punto de nacimiento de Cu^1 y la analis a $^1/_2$, ligeramente interrumpida en la célula cubital inferior.

Orthotipo *Pamphila citrus* Mabille.

Yvretta vesana Weeks.

1901. *Chaerephon vesana* Weeks, Proc. New Engl. Zool. Club. 2: 80.
1905. *Chaerephon vesana* Weeks, Illustr. Diurn. Lep. 1: 55, pl. 16, fig. 1.
1906. *Chaerephon mengeli* Weeks, Psyche 13: 68.
1911. *Chaerephon mengeli* Weeks, Illustr. Diurn. Lep. 2: 17, pl. 11, fig. 1.
1925. *Chaerephon pudorina* Lindsey (nec. Plotz), Den. Univ. Bull. Journ. Scien. Lab. 21: 92, pl. 26, fig. 10 & pl. 30, fig. 11 (genitalia).
1932. *Chaerephon lindseyi* Bell, Amer. Mus. Nov. N° 555, p. 4, fig. 7 (genitalia).

♂ Expansión alar 25 mm.

Color de fondo pardo tirando a café, el borde externo finamente pardo más oscuro, las orlas del color de fondo, el estigma negruzco.

En el ala anterior hay rastros de tres puntos subapicales y otros dos en el disco del ala, pero por lo general estos cinco puntos faltan en la faz superior de los ejemplares argentinos.

En el ala posterior hay una hilera de puntos amarillentos discales, apenas visibles.

La faz inferior es más clara, los puntos del ala anterior más definidos y más grandes y con una manchita clara y difusa en la célula anal. En el ala posterior los puntos discales algo más distintos que en la faz superior.

♀ Igual al macho en tamaño y diseño, salvo por la falta del estigma y por tener la maculación, por lo general, algo más claramente definida. En algunos ejemplares se encuentra otro punto claro en el fin de la célula del ala anterior.

Patria. — Brasil, Paraguay, Argentina, Bolivia y Guayana Francesa. En la Argentina del Norte de Misiones (Hayward) en col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales.

Género *Poanes* Scudder.

1872. *Poanes* Scudder, Rep. Peabody Acad. 1871, p. 76. Orthotipo *Hesperia massasoit* Scudder.
1872. *Phycanassa* Scudder, *op. cit.*, p. 77. Orthotipo *Hesperia viator* Edwards.
1872. *Choranthus* Scudder, *op. cit.*, p. 79. Orthotipo *Hesperia radians* Lucas.
1905. *Paratrytone* Dyar, Journ. N. Y. Ent. Soc. 13: 136. Orthotipo *Pamphila howardi* Skinner.

Por lo cual *Choranthus* (Hayward, *Rev. Soc. Ent. Arg.* 6: 123, 1934) debe ser eliminado, y la especie *immocerinus* Hayward, colocada en el género *Poanes*.

Género *Atrytone* Scudder.

1872. *Atrytone* Scudder, Rep. Peabody Acad. 1871, p. 77. Orthotipo *Hesperia iowa* Scudder.
1872. *Euphyes* Scudder, *op. cit.*, p. 80. Orthotipo *Hesperia metacomet* Harris.
1905. *Anatrytone* Dyar, Journ. N. Y. Ent. Soc. 13: 140. Orthotipo *Hesperia delaware* Edwards.

Por lo tanto debe suprimirse el género *Euphyes* (Hayward, *Rev. Soc. Ent. Arg.* 6: 116, 1934) y transferir la especie *meridiani* Hayward al género *Atrytone*.

Lerodea erythosticta Prittwitz.

1868. Prittwitz, Stett. Ent. Zeit. 29: 186, fig. 1.

En *An. Soc. Cient. Arg.* 125: 382 (11 del tiraje aparte) di en error como autor de esta especie « 1883, Plötz, *Exot. Schmett.* 20 Tab.

483 ». Tengo que agradecer a mi amigo Ernesto Bell por haberme señalado este error. En el lugar citado la especie figura como *Megistias erythosticta* (ver *Hesperioidea Argentina* VIII).

Lerodea tripunctata Latreille.

Nueva procedencia: la provincia de Corrientes (Alberto Breyer).

Lerodea tripuncta (Herrich-Schäffer).

1869. *Prenes tripunctus* Herrich Schaffer, Podr. Syst. Lep., p. 82.
1931. *Lerodea tripunctus* Lindsey, Bell & Williams, Den. Univ. Bull. 26: 134, pl. 32, fig. 36 (genitalia).

Es algo difícil separar esta especie de *tripunctata* Latreille. Por lo general los puntos subapicales resaltan más en *tripuncta*, pero a veces, son poco visibles o faltan por completo, y su número varía hasta tres. Los puntos amarillentos discales son como en *tripunctata*. La única forma de clasificar esta especie con seguridad es por un examen de sus genitales en que el aedoeagus tiene una espina larga en *tripunctata* y más corta en *tripuncta*. Además hay una ligera diferencia en la terminación de las válvulas.

Patria. — Cuba y toda América del Sur. Tengo o he visto ejemplares de Cuba, Brasil, Guayana Británica, Panamá, Perú, Paraguay, Ecuador y la Argentina, de la cual tengo ejemplares de Corrientes.

Lerodea noctis Plötz.

Nueva procedencia: Corrientes (Alberto Breyer).

Lerodea mocoreta nov. (Fig. 3).

Expansión alar 24 mm.

Es difícil distinguirla de la especie *tripuncta* Herrich-Schäffer (ver más arriba), salvo por un examen de sus genitales.

Color de fondo parduzco, apenas más claro hacia el borde externo. En el ala anterior hay tres puntos subapicales ligeramente en curva (la concavidad distad) y tres puntos claros discales, uno en el ápice de la célula mediana inferior, otro y el más grande en el ápice de la célula cubital superior y uno apenas visible en la célula cubital inferior. (Es de esperar que en algunos ejemplares estos puntos faltarán en parte o por completo, como pasa en las demás especies de *Lerodea*).

La faz inferior es más clara, la maculación del ala anterior como en la faz superior, pero más resaltante; el ala posterior con una hilera indistinta de puntos claros en el disco.

Las orlas son grisáceas.

FIG. 3. — Genitalia de *Lerodea mocoreta* Hayw. (Holotipo ♂).

Nombrada como recuerdo de la tribu de indígenas que anteriormente habitó la región que conocemos ahora como la provincia de Corrientes.

Holotipo ♂ en mi colección, de Corrientes.

Phanes belli nov. (Fig. 4).

No puedo encontrar diferencias en tamaño, coloración o maculación entre esta especie y *Phanes cumbre* Schaus y *Phanes triumviralis* Hayward.

Estas tres especies vuelan juntas, y se puede separarlas solamente por un examen de los genitales de sus machos.

Desgraciadamente, el único macho que poseo tiene la terminación de las válvulas algo rotas, por lo cual el dibujo es defectuoso.

Tengo el placer de dedicar esta especie a mi amigo señor Ernesto Bell, de Nueva York, quien fué el primero en señalarme (*in litteris*) que había una tercera especie entre las *cumbre* capturadas durante mi viaje a Misiones en 1933-34 y de obsequiarme con un ejemplar macho.

Holotipo ♂ de Puerto Bemberg en Misiones (Hayward, XII, 1933), en mi colección.

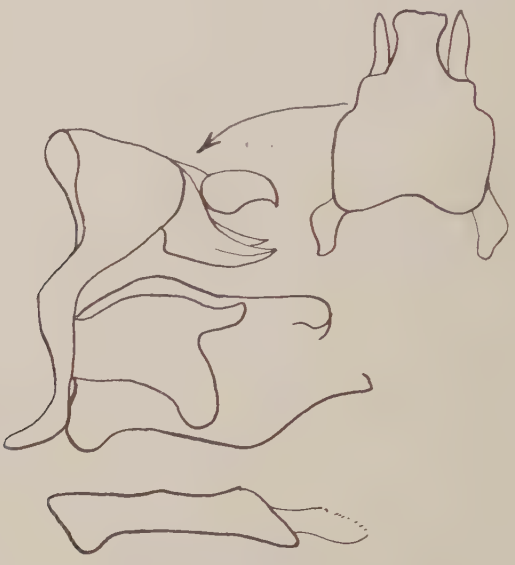

FIG. 4. — Genitalia de *Phanes belli* Hayw. (Holotipo ♂).

Género *Mnasicles* Godman.

1901. *Mnasicles*, Godman en Godman & Salvin, Biol. Centr. Amer. Rhop. 2: 602.

Antenas delgadas y la mitad (o más) del largo de la costa. Tercer artejo de los palpos largo. M^2 algo deprimida en su base. Alas posteriores redondeadas en el ángulo anal. Tibias medianas sin espinas. El estigma del macho formado por una línea (interrumpida en la célula cubital inferior) entre el punto de nacimiento de Cu^1 y la analis.

Ortothipo *Mnasicles geta* Godman.

Mnasicles köhleri nov. (fig. 5).

Expansión alar 24 mm.

Color de fondo parduzco, algo bronceado, algo más negruzco hacia el borde externo del ala anterior. Las orlas más claras.

En la base de ambas alas, y especialmente en el disco del ala posterior, hay pelos de color ocre.

La faz inferior mucho más clara, algo grisácea, la base y el disco del ala anterior negruzcos. En la mitad basal de la costa del ala anterior hay algunos pelos de color ocre.

Palpos grisáceos en la parte superior y blancos en la parte inferior.

Nombrada por mi amigo don Pablo Köhler, de quien he recibido muchas de las especies de hespéridos estudiados durante los últimos años.

FIG. 5. — Genitalia de *Mnasicles köhleri* Hayw. (Holotipo ♂). (A) dibujo del estigma

Holotipo ♂, allotipo ♀ y un paratipo ♂ de Corrientes, todos en mi colección.

Mnasilus pencillatus Godman.

Nueva procedencia: provincia de Corrientes.

Paracarystus evansi Hayward.

En *An. Soc. Cient. Arg.* 125: 230 y 231, 1938, bajo esta especie, se encuentra citada la especie *P. menestriesi* Latreille. La ortografía correcta es *menestries* Latreille.

Godmania lunata Plötz, fa. *restricta* Hayward.

Nueva procedencia: Corrientes (Alberto Breyer).

Concordia, 11 de Diciembre de 1938.

OBSERVACIONES CRANEANAS EN LOS ELEFANTES DE MAR

POR

CARLOS RUSCONI

Entre nosotros poco es lo que se ha investigado sobre las modificaciones que se operan en el cráneo de los elefantes de mar (*Mirounga leonina* L.) durante su desarrollo extrauterino. Es cierto que materiales de esta naturaleza no son muy abundantes en nuestros museos pero es que tampoco se han preocupado de una manera especial a no ser alguno que otro estudioso que, por circunstancias diversas se concretaron al estudio relacionado con la protección de la fauna marina y entre cuyas investigaciones merecen ser destacadas las del distinguido zoólogo Dr. Marelli, las de Valette, etc.

Menos aún se han realizado trabajos monográficos vinculados con nuestros pinnípedos o en particular sobre cada uno de los géneros: *Otaria, Arctocephalus, Lobodon, Leptonychotes* y *Mirounga,* si se exceptúan las investigaciones hechas por especialistas extranjeros en base a materiales recogidos durante diversas expediciones que tienen sus comienzos desde hace varios siglos atrás. Para realizar una tarea de esa naturaleza que permita dar nuevos frutos o bien ampliar el conocimiento que de cada uno de esos géneros poseemos, no sólo se impone la tarea de practicar viajes y recoger materiales sinó de hacer pacientes investigaciones en los lugares donde esos animales habitan, especialmente aprovechando la época de parición que es precisamente cuando las hembras, por razones obvias, buscan en tierra un refugio adecuado para obtener el alimento a sus proles y por eso se hallan expuestas al alcance del observador.

Con excepción de los lobos de un pelo (*Otaria byronisa* Blainv.) que se muestran casi indiferentes al influjo de la civilización que va conquistando palmo a palmo la inmensidad de nuestras costas

y que pueden hallárselos solos o agrupados en manadas de a miles en diversos lugares de nuestra costa bonaerense o en la patagónica (Península Valdez, Río Negro, etc.). En cambio, tanto el otro género de los *Otariidae* o sea el lobo de mar de dos pelos (*Arctocephalus australis* Zimm) como los géneros de los *Phocidae* que comprende la foca cangrejera (*Lobondon carcinophagus* Gray); la foca de Ross o de grandes ojos (*Ommatophoca Rossi* Gray); el leopardo de mar (*Ogmorhinus leptonyx* Blainv.); el falso leopardo de mar o foca de Weddell (*Leptonychotes Weddelli* Lesson), todos ellos se encuentran circunscriptos a la zona más fría y semipolar.

Aun cuando los elefantes de mar tienen una distribución extraordinaria (Tierra del Fuego, Falkland, South Georgia, Shetlan, Juan Fernández, Kerguelen, S. Paulo, Tristán de Cunhna, sur de Nueva Zelandia, etc.), sin embargo, es más frecuente ver de vez en cuando parejas o individuos aislados que llegan a surcar las aguas del Atlántico viniendo a morir en las costas fluviales de la provincia de Buenos Aires, y cuando no remontan hasta muchos kilómetros el río Paraná, Uruguay, etc., como en el caso de las ballenas, delfines y otros animales marinos de organización anatómica inferior.

El movimiento emigrativo hacia el polo sur de nuestra especie *M. leonina,* o bien hacia el polo opuesto si se tratara de la otra especie *M. angustirostris,* no se debe a otra cosa que a la encarnizada caza a que se hallan sometidas tanto éstas como todas aquellas especies en que el lucro constituye el motivo principal.

Mientras tanto, señalaré aquí los principales detalles anatómicos craneanos de individuos pertenecientes a diferentes edades de nuestro elefante de mar, llamando la atención que algunos huesos modifican más profundamente su forma y tamaño durante el desarrollo completo del animal y para ello he de valerme de dos cráneos machos hallados por el extinto L. Kraglievich en la costa norte de la Península Valdez. Del adulto (nº 278 de la colección zoológica de Rusconi) poseo parte de su esqueleto y del joven (nº 506 de la misma colección) poseo su cráneo aunque tenía en el momento de su extracción todo el cuerpo que medía apenas un metro de longitud.

II

VISTA SUPERIOR

PRAEMAXILLARE. — Este hueso aumenta de volumen con la edad pero sufre pocas variaciones morfológicas, siendo en la parte superior o piso de la fosa nasal donde aparecen grandes crestas lon-

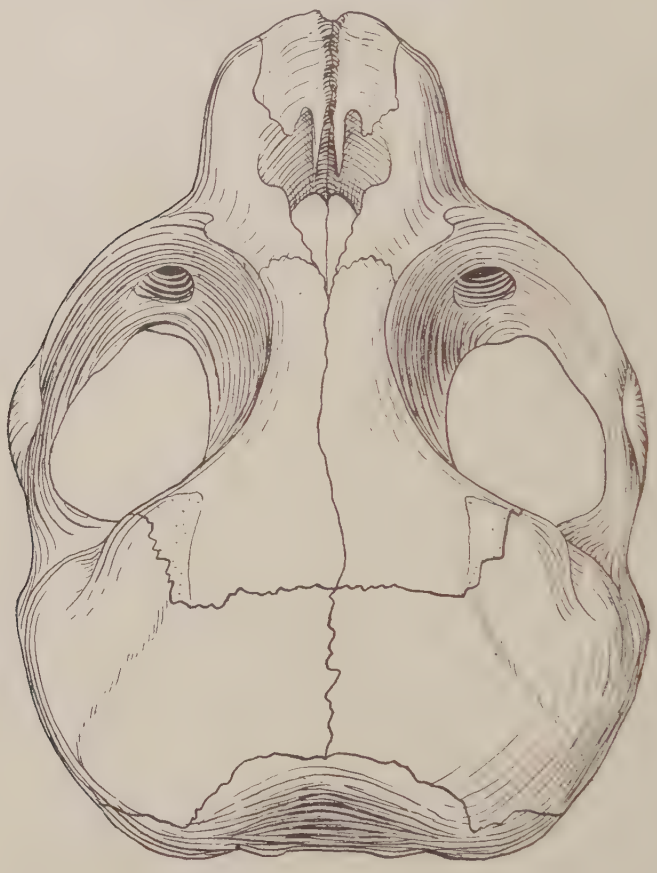

FIG. 1. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar jóven ♂, visto de arriba, nº 506, a 1/3 del natural.

gitudinales que originan surcos profundos y sirven de alojamiento a los grandes músculos de la trompa que, como se sabe, adquiere ese órgano un gran desarrollo con la edad del animal (figuras 1 y 2).

MAXILLARE. — Estos huesos se prolongan mucho hacia adelante y adquieren también mayor robustés con la edad; pues, en los jóvenes ambos maxilares son estrechos en el extremo anterior mien-

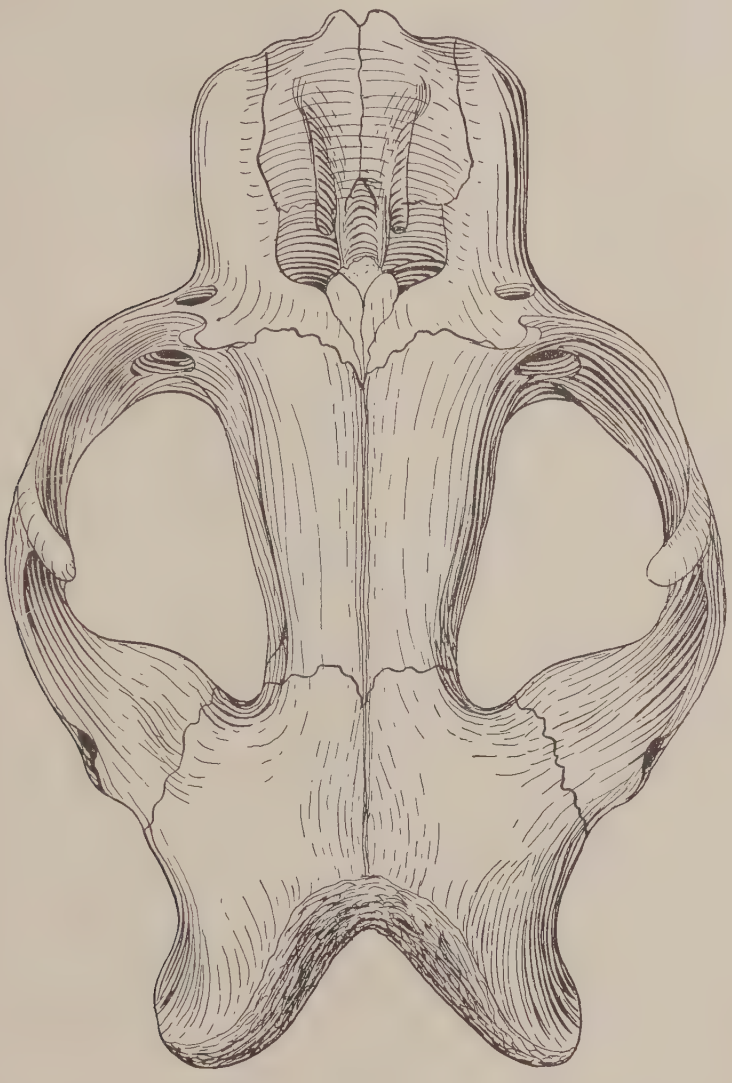

FIG. 2. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar adulto ♂, nº 278, a 1/4 del natural.

tras que en los adultos ocurre un caso inverso sobre todo al nivel de los dientes caninos que es donde alcanza su mayor amplitud transversal. La longitud de este hueso (tomada desde la pun-

ta anterior al extremo posterior que une el frontal con el nasal, es de una vez y media el tamaño del joven.

NASALE. — Aumentan muy poco de amplitud pero en cambio sufren grandes modificaciones en el decurso de su desarrollo. En los jóvenes, la cara superior describe una línea recta que se dirige perpendicularmente hacia abajo, pero en los adultos, la orientación se invierte de modo que la superficie se curva fuertemente hacia arriba siendo debido, tal vez, al excesivo desarrollo del tabique nasal. Este último cartílago tiene en ese lugar un centímetro de espesor y se antepone a los huesos nasales de tal modo que quedan prácticamente encerrados por aquella sustancia cartilaginosa.

FRONTALE. — Muy importantes son también las modificaciones que se operan en estos huesos. En los juveniles se advierten dos planos principales: Una parte de la superficie es de línea casi plana en ambos sentidos anteroposterior y transverso; la otra mitad del hueso se orienta verticalmente de modo que se origina una línea divisoria y angulosa que viene a coincidir con el borde orbitario superior. Por el contrario, en los individuos adultos, los huesos adquieren una notable convexidad o abultamiento en su extremo anterior, describiendo transversalmente una sección semicilíndrica y no en forma de ángulo como en el caso de los jóvenes. Visto de arriba, los frontales del joven tienen la figura de un triángulo más o menos isósceles con su base situada hacia atrás, y su mayor constricción adelante; pero en los adultos se opera tal cambio que la mayor está precisamente en la parte anterior. Este enorme inflamiento está relacionado con el no menos desarrollo de los huesos etmoidales y además con la probóscide que adquiere su mayor amplitud en los individuos maduros. Con estas modificaciones que se operan en los frontales resulta también que el borde de la órbita es cada vez menos definido o mejor dicho no se destaca tan fácilmente como en los individuos de corta edad.

PARIETALE. — Esta es otra de las zonas craneanas en que se operan profundas modificaciones con la edad. Los parietales de los jóvenes describen una línea bastante convexa en ambos sentidos anteroposterior y transversa; mientras en los adultos la primera línea se torna cada vez más curva y el borde de ambos huesos se

eleva considerablemente contribuyendo a formar parte de la cresta occipital.

VISTA POSTERIOR

Occipitale. — Notable es el cambio que se advierte también en estos huesos los cuales adquieren un enorme desarrollo sus alas laterales, prolongándose más de 10 centímetros hacia atrás del fondo del *planum occipitale*. Por esta causa dicha zona adquiere

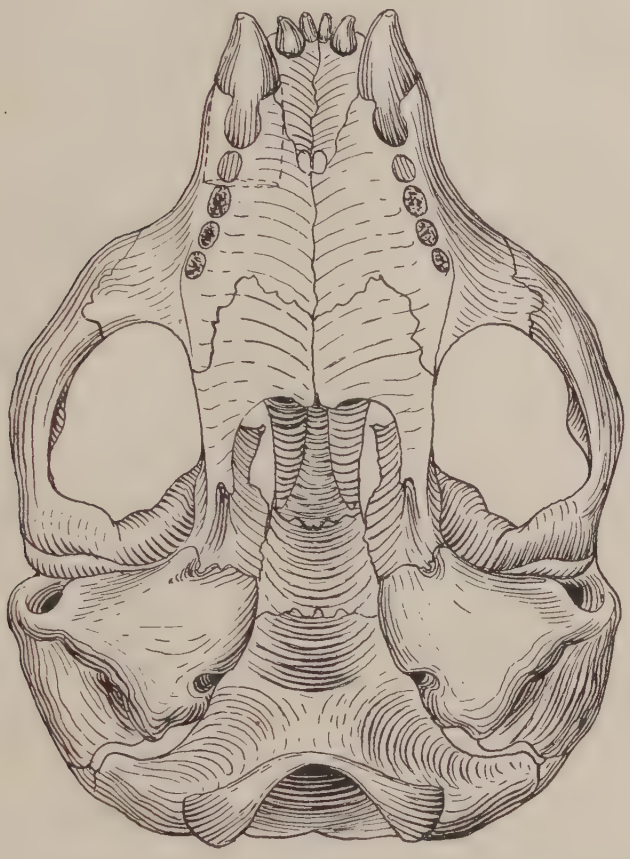

Fig. 3. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar jóven nº 506, reducido a la 1/2 del natural.

con la edad una superficie muy cóncava en forma de una gran fosa. Interesante es observar, asimismo, el diámetro transverso del agujero occipital porque es más amplio en el joven, lo que en proporción resulta ser mucho mayor que el del adulto. En cambio no ocurre así con la distancia que media entre ambos lados

externos de los cóndilos occipitales que en el adulto es de media vez mayor. Dicha diferencia depende de la progresiva amplitud que adquieren lateralmente la superficie articular de los cóndilos occipitales.

Fig. 4. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar adulto ♂, nº 268, a 1/4 del natural.

VISTA INFERIOR

Ancho craneano. — En los individuos jóvenes, la distancia entre el borde de ambos agujeros audictivos es más o menos la misma que se obtiene cuando se miden ambos arcos cigomáticos (fi-

gura 3), pero en los adultos esta última aumenta considerablemente de anchura adquiriendo los arcos una fuerte curvatura y que es allí donde se encuentra su mayor anchura craneal (figura 4). Los arcos cigomáticos, a su vez, sufren algunas modificaciones en el decurso de su crecimiento; pues en los juveniles tiene el aspecto de una lámina ósea delgada, de borde filoso; mientras que en los adultos toman gran robustez y aquel borde se hace cada vez más romo presentando en estos casos una sección cuadrangular en una gran parte de su extensión. En los huesos restantes de la cara inferior, las modificaciones, por lo regular, consisten en un aumento progresivo.

VISTA LATERAL

El carácter morfológico que se advierte fácilmente cuando los cráneos son vistos lateralmente, es el que se refiere a los huesos parietales. En el joven (figura 5), el extremo posterior de los

Fig. 5. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar jóven, nº 506, a la 1/2 del natural.

parietales terminan describiendo una acentuada convexidad que cae verticalmente al borde posterior de los cóndilos occipitales; mientras en el adulto (figura 6), se opera un extraordinario desarrollo que motiva un recurvamiento hacia arriba y atrás de los citados huesos.

SUTURAS

Solamente en los individuos muy viejos debe operarse la obliteración de casi todas las suturas craneanas; pues el ejemplar que poseo, que es de gran magnitud y ha pertenecido a un individuo

Fig. 6. — *Mirounga leonina* L. Ejemplar adulto ♂, nº 278, a 1/4 del natural.

viejo, sin embargo, todas las sinartrosis están abiertas igual que en el joven con excepción de la caja timpánica y del escamosal que se unen fuertemente desde una edad temprana.

MANDIBULA

La mandíbula adquiere un extraordinario crecimiento sobre todo en lo que respecta a la longitud sinfisiana, que es de dos veces y media la longitud de la que tiene en el joven. También es muy acentuado el crecimiento en altura de la rama la cual tiene en algunos trechos casi tres veces la altura de la del joven que

me sirve de término de comparación. Aparte de este extraordinario crecimiento, en la rama se operan modificaciones morfológicas relativamente apreciables. Una de ellas es, por ejemplo, el gran desarrollo de la protuberancia mentoniana lo que origina en la sínfisis una línea más ortognata que en la de los individuos jóvenes. Otro punto se refiere a su rama ascendente que se curva hacia arriba y adelante ofreciendo un ángulo cada vez más recto.

DENTADURA

La dentadura de los pinnípedos ofrece con frecuencia anomalías que consisten en la persistencia o ausencia de alguno de sus órganos dentales ya sea en ambos lados o en uno solo, tanto en los maxilares como en la mandíbula.

En el ejemplar juvenil existen cinco alvéolos postcaninos tanto en los maxilares como en la mandíbula, pero en el adulto hay seis órganos postcaninos en el maxilar del lado izquierdo y tan sólo cuatro en el lado opuesto.

Una característica interesante de los alvéolos es, por ejemplo, su profundidad que sólo la adquieren en el curso de su desarrollo extrauterino y en la edad adulta. En el espécimen joven, los alvéolos correspondientes a los premolares de leche tienen apenas dos milímetros de profundidad y su fondo de tejido óseo descansa inmediatamente sobre la raiz de los dientes caninos. Esta exigua profundidad se manifiesta también en los alvéolos de los dientes permanentes lo que me hace suponer que los folículos dentales no se desarrollan en una zona profunda, como ocurre esto último con muchos grupos de carnívoros, sinó superficialmente, cerca del borde alveolar. Con esto quedaría también explicado la pérdida frecuente de los dientes de los animales jóvenes sobre todo durante el proceso de maceración.

Los alvéolos, empero, van adquiriendo mayor hondura con la edad, de tal modo que en los viejos pueden alcanzar su fondo hasta cuatro centímetros y estar orientados oblícuamente hacia atrás y arriba en los del maxilar, y hacia atrás y abajo en los de la mandíbula.

También es interesante la modificación que sufre el diente canino; pues en el joven está orientado casi horizontalmente y su raiz ocupa una gran parte de los huesos premaxilares y además que la corona tiene mayor curvatura con la edad.

MEDIDAS CRANEODENTALES DE *MIROUNYA LEONINA* (L)

	Ejemplar ♂ nº 506 Col. Rusconi Loc.: Península Valdez	Ejemplar ♂ nº 278 Col. Rusconi Loc.: Península Valdez	Ej. ♂ según Turner 1888, Vol. XXVI, Loc.: Head Island	Ej. ♂ según Scott Loc.: Head Island	Ej. ♂ según Flower Loc.: Islas Falkland	Ej. ♀ según Turner Loc.: Islas Kerguelen
Longitud cóndilo basal	219	520	486	493	564	300
Longitud total	220	560	508	497	597	296
Longitud de los nasales	29	58	55	65	—	43
Ancho máximo de la fosa nasal anterior	37	87	98	96	—	48
Longitud de la fosa nasal desde la punta nasal al extremo del maxilar	56	180	—	—	—	—
Ancho bieigomático máximo	162	365	354	350	384	222
Ancho máximo de ambas crestas occipitales laterales	128	232	203	201	242	171
Ancho máximo detrás del agujero auditivo externo	160	300	284	303	—	199
Ancho del rostro al nivel de los caninos	60	162	160	146	158	62
Ancho interorbitario	26	75	65	71	—	38
Ancho del paladar por el lado externo del último molar	71	151	—	—	—	—
Diámetro bicondilar máximo	71	115	—	—	—	—
Longitud del paladar	104	275	—	—	—	—
Altura del cráneo desde el basion al supraoccipital	92	195	167	160	—	112
Longitud dental	70	160	—	—	—	—
Espacio ocupado por los dientes postcaninos	46	76	—	—	—	—
Diámetro transverso del canino al nivel alveolar	12	37	36	—	—	12
Longitud mandibular	147	370	350	326	375	191
Longitud sinfisiana	50	120	—	—	—	—
Altura de la apófisis coronoidea	60	215	—	—	—	—
Altura de la rama al nivel del último diente	25	100	—	—	—	—
Ancho del cóndilo mandibular	29	102	—	—	—	—
Espacio ocupado por toda la dentadura	63	110	—	—	—	—

DIFERENCIAS CON « M. ANGUSTIROSTRIS »

De las diversas especies de elefantes de mar propuestas por los autores, *Mirounga angustirostris* (Gill) es una de las buenas especies de la zona circunmpolar del norte y las diferencias craneanas que se advierten comparadas con las del sur son, entre otras, las que siguen:

El volumen craneano no difiere mayormente en ambas especies, pero en cambio el espesor o altura del arco cigomático es mucho menor en *M. leonina*. El hueso jugal es relativamente grácil y se prolonga en forma de una apófisis alargada con dirección hacia atrás y abajo; mientras que en la especie del norte dicho hueso es muy robusto verticalmente y casi truncado hacia atrás.

Además, en esta última especie, la parte posterior del maxilar al nivel del último diente, tiene una forma angulosa y de distinta morfología. En *angustirostris*, una parte del frontal es más alto y menos ancho que en el mismo hueso de *M. leonina*.

También la mandíbula acusa algunas diferencias, una de las cuales aparece en el borde inferior; pues, en la de *M. leonina* describe una línea en semicírculo bastante acentuado; mientras que la de *angustirostris* muestra entre el ángulo mandibular y la sínfisis una línea cóncava relativamente pronunciada. Sobre esta especie del norte se han ocupado también numerosos autores siendo uno de los recientes el artículo publicado por Townsend en 1912 quién dió a conocer diversos detalles de su anatomía craneana.

BIBLIOGRAFIA

Allen, J. A., *History of North American Pinnipeds*, 1880.

Flower, W. H., *On the elefant seal « Macrorhinus leoninus (Linn.)*, en *Proc. Zool. Society*, pp. 145-162, London, 1881.

Marelli, C. A., *Los vertebrados exhibidos en los zoológicos del Plata*, en *Memorias del Jardín Zoológico de La Plata*, vol. IV, La Plata, 1931.

Marelli, C. A., *Bibliografía Eurística de los mamíferos de caza y caza marítima*, en *Memorias del Jardín Zoológico de La Plata*, La Plata, 1936.

Rusconi, C., *Los mamíferos del Jardín Zoológico de Buenos Aires y reseña de su antepasados prehistóricos*, en *Consejo General de Educación*, pp. 1-15, Paraná, 1935.

Scott, *Transv. New. Zeal Institut*, vol. XV, 1883.

Turner, H. N., *Challenger's Report*, 1888.

TARIFAS FERROVIARIAS DE UTILIDAD MÁXIMA

POR EL

ING. EMILIO REBUELTO

(Continuación)

IV. — TARIFAS DE PRECIO UNICO

Llamamos tarifas de precio único, o de tipo postal, o tranviario, a aquellas tarifas en las cuales el precio del transporte es fijo, único, igual para todas las distancias, tal como sucede con el franqueo postal que es el mismo para una carta, sea que su destinatario se encuentre alejado del punto de procedencia unos pocos centenares de metros o varios centenares de kilómetros. El precio del pasaje tranviario, también es el mismo para muy diversas longitudes de trayectos.

En las empresas ferroviarias no rigen aún comúnmente tarifas de este tipo, aunque los « abonos » vienen a serlo en cierto modo, pues su precio es el mismo cualquiera que sea el número de viajes y por lo tanto los kilómetros recorridos por el pasajero, en determinado intervalo de tiempo. Ciertas tarifas por zonas, cuando éstas son muy extensas, así como un gran número de tarifas especiales, sobre todo las establecidas por motivos de competencia, ofrecen también ejemplos en los que la tarifa es constante e independiente de la distancia recorrida por la carga.

Estudiemos el caso general, en que una empresa decidiera implantar una tarifa de esta clase, a lo largo de su línea. En este caso, siendo $y = c$, se iba a originar a ambos lados de la línea una zona de influencia de un ancho constante, igual a

$$\frac{v - c}{f}.$$

En cuanto al largo de esta zona rectangular, es evidente que no influyendo la distancia x, sería indefinido; o sea, que, en teoría,

la zona de influencia creada por la tarifa postal sería un rectángulo extendido hasta el punto extremo de la línea. Pero en la práctica, la tarifa c sería aplicable solamente hasta la distancia en que igualase a los gastos de transporte:

$$gx = c \qquad \therefore \qquad x = \frac{c}{g}$$

Esta será la distancia máxima de transporte.

La zona de influencia se compondrá, pues, de un rectángulo de largo $\frac{c}{g}$ y un ancho igual a $2\,\frac{(v - c)}{f}$; y además, de un semicírculo de radio $\frac{v - c}{f}$, que corresponderá a la zona desde la cual se podrán hacer transportes radiales hacia punta de rieles; en total, pues,

$$A = \frac{2\,(v - c)}{f}\,\frac{c}{g} + \frac{1}{2}\,\pi\left(\frac{v - c}{f}\right)^2$$

La producción total será $A\gamma$; y como la tarifa es c, los productos serán $A\,\gamma\,c$

$$P = A\,\gamma\,c = \frac{2\,\gamma\,(v - c)\,c^2}{fg} + \frac{\gamma\,\pi\,(v - c)^2\,c}{2f^2}$$

Para avaluar los gastos, en la parte rectangular habrá que multiplicar la producción correspondiente a un elemento dx de la línea ferroviaria, por el gasto gx que ocasiona su transporte a la distancia x; esta producción será la correspondiente al área del rectángulo elemental $\frac{2\,(v - c)}{f}\,dx$; escribiendo su expresión en toneladas e integrando desde cero hasta $\frac{c}{g}$, tendremos

$$\int_0^{\frac{c}{g}} \frac{2\,(v - c)}{f}\,\gamma\,gx\,dx = \frac{\gamma\,(v - c)\,c^2}{fg}$$

y agregando los gastos que origina el transporte de la producción del área semicircular, a la distancia $\frac{c}{g}$, que serán, por lo tanto, c, resultará finalmente

$$G = \frac{\gamma\,(v - c)\,c^2}{fg} + \frac{\gamma\,\pi\,(v - c)^2\,c}{2f^2}$$

Y la utilidad de la empresa, siendo la diferencia entre productos y gastos, importará para la distancia $\frac{c}{g}$,

$$U = P - G = \frac{\gamma\,(v - c)\,c^2}{fg}$$

En esta expresión, no aparece π, lo que demuestra que la carga procedente de la zona semicircular, no produce utilidad alguna; en efecto, se la transporta por un precio c a una distancia x, cuyos gastos son precisamente $gx = c$. Para los cálculos sobre la utilidad de la empresa, cuando se lleva la tarifa c hasta la distancia máxima $\frac{c}{g}$, puede, pues, prescindirse de la zona semicircular, pero no para el estudio aislado de los productos, gastos y coeficiente de explotación.

En realidad no debe en ningún caso prescindirse de cuanto facilite estos transportes desde punta de rieles, aunque se hagan al costo, pues ellos favorecen el desarrollo de la zona, e indirectamente, el tráfico de ella o hacia ella de otras cargas que, con otras tarifas, pueden ofrecer amplia compensación remunerativa.

Si buscamos ahora el valor de c que conduce al máximo de U, tendremos:

$$\frac{dU}{dc} = \frac{\gamma}{fg}\,[2\,vc - 3\,c^2]$$

$$\frac{d^2U}{dc^2} = \frac{2\,\gamma}{fg}\,[v - 3\,c]$$

El valor de c, distinto de cero, que anula a la derivada primera, es

$$c = \frac{2}{3}\,v$$

siendo fácil verificar que éste hace negativa a la derivada segunda; luego hemos encontrado el máximo, el cual será

$$U = \frac{\gamma}{fg}\left(v - \frac{2}{3}\,v\right)\frac{4\,v^2}{9} = \frac{4\,\gamma\,v^3}{27\,fg}$$

$$= 0{,}148\,\frac{\gamma\,v^3}{fg}$$

Recordemos que con las tarifas *parabólicas* no se llegaba más que a $0{,}133\,\frac{\gamma\,v^3}{fg}$; luego, las del tipo postal, ofrecen cierta ventaja

sobre aquéllas, si bien no alcanzan a igualar a la utilidad suministrada por las *terminales* que ya vimos era de $0{,}166\,\frac{\gamma\, v^3}{fg}$.

En cuanto a la distancia máxima hasta la que pueden ser aplicadas estas tarifas, resulta de

$$c = gx = \frac{2}{3}v \quad \therefore \quad x = \frac{2\,v}{3\,g} = 0{,}66\,\frac{v}{g}$$

algo mayor de la correspondiente a las kilométricas, $0{,}5\,\frac{v}{g}$, pero un poco menor de la conseguida con las terminales y parabólicas. Esto último no es un inconveniente en la práctica, pues generalmente, para mercaderías de alto valor de v, y en ferrocarriles en que g es bajo, la longitud resultante para x, es superior a la necesaria en la realidad, por no haber a esas distancias tierras en explotación o mercaderías que transportar, y muchas veces, ni llega el ferrocarril a tener sus líneas extendidas hasta semejantes distancias.

En 1935 (ver *Estadísticas de los Ferrocarriles en explotación*, publicada por la Dirección General de Ferrocarriles), el gasto directo por ton-Km útil en el Central Argentino fué de 1,89 $ oro por 1.000 ton-Km, y el término medio de aprovechamiento de los vagones, de 2,27 ton. brutas para una ton. útil; de aquí se deduce que

$$g = 0{,}00189\ (2{,}27) = 0{,}00429$$

en $ oro o 0,0097 $ m/n por ton-Km útil, un centavo aproximadamente; entonces

$$x = \frac{2\,v}{3\,g} = \frac{2\,v}{0{,}03} = 67\,v$$

Bastaría que una carga tuviera un v igual o superior a los 14 $ m/n — lo que es un caso frecuente, — para que x resultara igual o superior a los 1000 Km, distancia de los puertos o de los grandes mercados consumidores que podría ser alcanzada fácilmente con estas tarifas de tipo postal; en el caso de

$$v = 14, \quad c = \frac{2}{3}\,v = 9{,}33\ \$\ \text{m/n}.$$

Los valores de P y G, una vez fijado c, resultan, respectivamente

$$P = \left(\frac{2}{g} + \frac{\pi}{6f}\right)\frac{\gamma\, c^3}{3f}$$

$$G = \left(\frac{1}{g} + \frac{\pi}{6f}\right)\frac{\gamma\, c^3}{3f}$$

y entonces el coeficiente de explotación que resulta para toda la línea es

$$E = \frac{G}{P} = \frac{\frac{1}{g} + \frac{\pi}{6f}}{\frac{2}{g} + \frac{\pi}{6f}} = \frac{6f + \pi g}{12f + \pi g}$$

$$= \frac{1 + \frac{\pi g}{6f}}{2 + \frac{\pi g}{6f}}$$

o sea, aproximadamente, 0,5, pues el término $\frac{\pi g}{6f}$ es pequeño, alrededor de 0,1.

Si se prescinde del efecto de la zona semicircular, el valor de E es exactamente 0,50.

Esta es una característica de las tarifas de tipo postal, lo que era presumible, pues se trata de tarifas caras en los primeros kilómetros, donde se debe evidenciar más aún el descenso de E, debido a que los productos crecen linealmente con la distancia, y los gastos con el cuadrado de la distancia. En efecto: El valor de los productos, a la distancia x, es

$$P = 2\gamma \frac{(v - c)}{f} cx + \frac{\gamma}{2} \pi \left(\frac{v - c}{f}\right)^2 c$$

y el de los gastos

$$G = 2\gamma \frac{(v - c)}{f} \int_0^x gx\, dx + \frac{\gamma \pi}{2} \left(\frac{v - c}{f}\right)^2 gx$$

Una vez determinado el valor de $c = \frac{2}{3} v$ que produce la utilidad máxima, estas expresiones se convierten en

$$P = \frac{4\gamma v^2 x}{9f} + \frac{\gamma \pi v^3}{27 f^2}$$

$$G = \frac{\gamma g v x^2}{3f} + \frac{\gamma \pi v^2 g x}{18 f^2}$$

No debe extrañar que para $x = 0$, resulte un valor para los productos, lo que equivocadamente podría interpretarse como conduciendo al absurdo de que, no habiendo línea férrea, puesto que $x = 0$, existen, sin embargo, productos. Lo que sucede es que al suponer anulada la longitud del ferrocarril, no se anula el área de la zona semicircular con que termina la zona total del ferrocarril. Los productores de la zona pagan c \$ m/n por el transporte de sus cargas cualquiera que sea la distancia x; y si los productores de la zona semicircular que queda cuando x es nula, efectuaran ese pago, tendríamos efectivamente, los productos que indica la fórmula para $x = 0$. En conclusión, así como el valor de x está limitado superiormente por $\frac{2\,v}{3\,g}$, lo está inferiormente por 0, y deberá ser siempre

$$0 < x < \frac{2\,v}{3\,g}$$

Si dejamos de lado el término correspondiente al área semicircular, el coeficiente de explotación se reduce a

$$E = \frac{G}{P} = \frac{3\,gx}{4\,v}$$

valor creciente con x, y que podrá bajar hasta límites extremos cuando v sea algo grande, y x reducido. El mayor valor de E se alcanzará para la distancia máxima x,

$$E = \frac{3\,g}{4\,v} \cdot \frac{2\,v}{3\,g} = 0{,}5$$

comprobándose así un resultado anterior.

Tomando en cuenta la zona semicircular, se tiene

$$E = \frac{\frac{\gamma\,g\,v\,x^2}{3\,f} + \frac{\gamma\,\pi\,g\,v^2\,x}{18\,f^2}}{\frac{4\,\gamma\,v^2\,x}{9\,f} + \frac{\gamma\,\pi\,v^3}{27\,f^2}}$$

$$= \frac{(6\,fx + \pi\,v)\,3\,gx}{(12\,fx + \pi\,v)\,2\,v}$$

valor que es sorprendentemente pequeño cuando x no se acerca a la distancia máxima.

Por ejemplo, cuando $x = \frac{v}{3g}$, el término $\frac{3gx}{2v}$ resulta 0,5; y entonces

$$E = 0{,}5\,\frac{6fx + \pi v}{12fx + \pi v}$$

$$= 0{,}5\,\frac{\frac{2fv}{g} + \pi v}{\frac{4fv}{g} + \pi v} = 0{,}5\,\frac{2f + \pi g}{4f + \pi g}$$

$$= 0{,}5\,\frac{1 + \frac{\pi g}{2f}}{2 + \frac{\pi g}{2f}}$$

y como $\frac{\pi g}{2f}$ es en general menor que 0,3, el valor de E se aproxima a

$$E = 0{,}5\,\frac{1{,}3}{2{,}3} = 0{,}5\ (0{,}56) = 0{,}28$$

Las tarifas postales son, pues, un ejemplo evidente de que un coeficiente de explotación bajo, no va acompañado de grandes utilidades, y que lo importante para la buena marcha de una empresa no es obtener muchos productos, ni tampoco incurrir en pocos gastos, sino en que unos y otros guarden entre sí la debida proporción para que la utilidad sea máxima. Más adelante, al comparar las utilidades conseguidas a una misma distancia con diferentes tarifas, volveremos sobre este punto.

Los resultados anteriores suponen que toda la zona de producción posible estuviera en actividad; pero en la práctica pueden presentarse circunstancias muy distintas. Supongamos que la zona *termina-se bruscamente* a una distancia x_1; dejemos de lado por el momento la zona semicircular. La utilidad proporcionada por la parte rectangular, será

$$U = 2\gamma\,\frac{(v - c)}{f}\int_0^{x_1}(c - gx)\,dx = \gamma\,\frac{(v - c)}{f}\,(2cx_1 - gx_1^2)$$

Considerando esta expresión como una función de c, derivando respecto a c, igualando a cero, y despejando el valor de c, resulta

$$c = \frac{2v + gx_1}{4}$$

valor que hace negativa la derivada segunda; luego corresponde a un máximo de la utilidad de la empresa, la cual será

$$U = \frac{\gamma}{f}\left(v - \frac{2v + gx_1}{4}\right)\left(vx_1 + \frac{gx_1^2}{2} - gx_1^2\right)$$

$$= \frac{\gamma}{8f}(2v - gx_1)^2 x_1$$

Es claro que para $x_1 = \dfrac{2v}{3g}$, se obtiene el valor anterior de U,

$$U = \frac{4\gamma v^3}{27fg} -$$

Al tener en cuenta el área semicircular con que termina la zona, el cálculo se complica un poco, pero es necesario tomarla en consideración, pues produce cierta utilidad, desde que la tarifa a la distancia x_1, es mayor que los gastos cuando x_1 es menor que la máxima $\dfrac{2v}{3g}$. La expresión de la utilidad en función de c, es

$$U = \frac{\gamma(v - c)}{f}(2cx_1 - gx_1^2) + \gamma\frac{\pi}{2}\left(\frac{v - c}{f}\right)^2 (c - gx_1)$$

Igualando a cero la derivada con respecto a c, después de algunas simplificaciones, resulta la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\frac{3}{2}\pi c^2 - [4fx_1 + \pi g x_1 + 2\pi v]c +$$

$$+ fg x_1^2 + (2f + \pi g) v x_1 + \frac{\pi}{2}v^2 = 0$$

Resolviéndola, se elige aquella de sus dos raíces que hace negativa a la segunda derivada; esta última es:

$$3\pi c - (4f + \pi g) x_1 - 2\pi v$$

para lo cual deberá ser

$$c < \frac{(4f + \pi g) x_1 + 2\pi v}{3\pi}$$

$$\therefore \qquad c < \frac{2v + gx_1}{3} + \frac{4f}{3\pi}$$

El siguiente ejemplo aclara el procedimiento del cálculo.

Sea un ferrocarril, en el cual el gasto directo por ton-Km útil es $g = 0{,}03$ \$ m/n; en una zona de malos caminos donde $f = 0{,}12$ \$ m/n. Se supone que se trata del transporte de una mercadería para la cual $v = 10$ \$ m/n, y $\gamma = 100$ ton.

El ferrocarril empieza a construirse, y ha librado al servivio una primera sección de 100 Km. Este sería el valor de x_1. La zona de afluencia termina bruscamente a los 100 kilómetros, tal como lo supone el caso teórico.

Si no tenemos en cuenta el área de la zona semicircular, la tarifa postal de utilidad máxima será

$$c = \frac{2\,v + g x_1}{4} = \frac{20 + 0{,}03\,(100)}{4} = \frac{23}{4} = 5{,}75 \text{ \$ m/n}$$

y la utilidad conseguida por la empresa resulta

$$U = \frac{\gamma}{8f}(2\,v - g x_1)^2\, x_1 = \frac{100}{8\,(0{,}12)}[20 - 0{,}03\,(100)]^2\,100 =$$

$$= \frac{10\,000}{0{,}96}\,17^2 = 3.010.415 \text{ \$ m/n.}$$

Cuando el ferrocarril libre al servicio público otra sección de vía, por ejemplo, 50 Km más, deberá subir la tarifa a

$$c = \frac{20 + 0{,}03\,(150)}{4} = 6{,}12 \text{ \$ m/n,}$$

y así sucesivamente, pero teniendo cuidado de no pasar de la distancia máxima de aplicación,

$$x = \frac{2\,v}{3\,g} = \frac{20}{0{,}09} = 222 \text{ Km}$$

para la cual la tarifa alcanzará al valor máximo de

$$c = \frac{2}{3}\,v = \frac{2}{3}\,10 = 6{,}60 \text{ \$ m/n}$$

Comprobemos que en los 100 primeros kilómetros, con la tarifa postal de 5,75 \$ moneda nacional, la empresa obtendría mayores utilidades que con tarifas de 5,60 y 5,90 \$ m/n.

Resultados con las tarifas de:

	5,60	5,75	5,90
Ancho de la zona a cada lado de la vía, en kilómetros	36,6	35,4	34,1
Area de la zona rectangular en Km²	7320	7080	6820
Producción total en ton.	732.000	708.000	682.000
Productos cobrados en \$ m/n.	4.098.200	4.071.000	4.023.800
Gastos del transporte	1.098.000	1.060.585	1.023.000
Utilidad	3.000.200	3.010.415	3.000.800

La mayor utilidad que proporciona la tarifa de 5,75 es de 10.000 $ m/n, sobre las otras dos, sean éstas mayores o menores. El coeficiente de explotación es para todas aproximadamente igual a 0,25, valor muy bajo, pero explicable por tratarse de un recorrido corto (100 Km).

Tomando ahora en cuenta la zona semicircular, tendremos que verificar los siguientes cálculos preparatorios:

$\frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2}(3{,}14)$	$= 4{,}71$	4,71
$4fx_1 = 4\,(0{,}12)\,100$	$= 48$	
$\pi g x_1 = 3{,}14\,(0{,}03)\,100$	$= 9{,}42$	
$2\pi v = 2\,(3{,}14)\,10$	$= 62{,}80$	120,22
$fgx_1^2 = 0{,}12\,(0{,}03)\,10\,000$	$= 36$	
$2fvx_1 = 2\,(0{,}12)\,(10)\,(100)$	$= 240$	
$\pi g v x_1 = 3{,}14\,(0{,}03)\,(10)\,(100)$	$= 94{,}20$	
$\frac{\pi}{2}v^2 = 3{,}14\left(\frac{1}{2}\right)100$	$= 157$	527,20

La ecuación de segundo grado a resolver, será

$$4{,}71\,c^2 - 120{,}22\,c + 527{,}20 = 0$$

o aproximadamente

$$4{,}7\,c^2 - 120\,c + 527 = 0$$

$$c = . \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - (4{,}7)\,(527)}}{4{,}7} = \frac{60 \pm \sqrt{1124}}{4{,}7}$$

La raíz correspondiente al signo negativo es la única que conviene al problema, y su valor es $c = 5{,}64$ $ m/n. Verifica también las condiciones del máximo, porque

$$\frac{2v + gx_1}{3} + \frac{4f}{3\pi} = \frac{20 + 3}{3} + \frac{0{,}48}{9{,}42} = 7{,}66 + 0{,}05 = 7{,}71$$

que es, efectivamente, mayor que c.

El cálculo de la utilidad, de acuerdo a la fórmula deducida antes, es:

De la zona rectangular:

$$U = \frac{\gamma\,(v - c)}{f}\,(2\,cx_1 - gx_1^2) =$$

$$= 100\,\frac{(10 - 5{,}64)}{0{,}12}\,(1128 - 300) = 3.008.400\ \$\ \text{m/n}$$

De la zona semicircular:

$$u = \frac{\gamma\,\pi}{2}\left(\frac{v - c}{f}\right)^2 (c - gx_1) =$$

$$= \frac{314}{2}\left(\frac{4{,}36}{0{,}12}\right)^2 (5{,}64 - 3) = \quad 547.159\ \$\ \text{m/n}$$

Utilidad total 3.555.559 $ m/n

que supera en más de 500.000 $ m/n el resultado obtenido con la tarifa de 5,75 $ m/n, y sin tener en cuenta la ganancia dejada por la carga proveniente de la zona semicircular.

Puede hacerse el cálculo de c sin pasar por la resolución de la ecuación de segundo grado; para eso se adoptan diferentes valores de c, calculando separadamente las utilidades provenientes de las dos zonas, sumándolas, y buscando así por tanteos el valor de c que produce el máximo valor de esta suma.

Si llamamos C el capital invertido por Km. de vía, Cx será el correspondiente a los x kilómetros de vía. Relacionando la utilidad al capital, tendríamos el *interés* i del negocio ferroviario:

$$i = \frac{U}{Cx} = \frac{\gamma\,(v - c)}{C\,f}\,(2\,c - g x) + \frac{\gamma\,\pi}{2\,C}\left(\frac{v - c}{f}\right)^2\left(\frac{c}{x} - g\right)$$

En rigor, esto supone que en la línea no hay más transportes que los de las cargas cuya tarifa es c, o sea, que todas las cargas se transportan a igual tarifa. Admitamos por un momento que se verificase efectivamente ese caso extremo. La fórmula nos demuestra que el interés i disminuye con x, pues x figura con signo negativo en un término y en el denominador de otro. La conclusión es, que cuanto más se prolongue la línea, más disminuye el interés del capital invertido en ella.

Si se consideran diferentes mercaderías, a diferentes tarifas c_1, c_2, c_3... producirán las respectivas utilidades u_1, u_2, u_3... y el interés será

$$i = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots}{Cx}$$

En la nueva suma, aparecerán varios términos en x, con signo negativo, y otros varios términos con la x en el denominador: o sea, el interés i disminuirá con x, tal como ya se evidenciaba en el caso de una sola tarifa.

Otro caso distinto que puede presentarse en la práctica, es aquel en que la zona de afluencia *principia* a la distancia x_1. Puede suceder, por ejemplo, que los primeros 50 o 100 Km. deban ser abandonados a la competencia de los camiones, o de otras empresas de transporte que converjan hacia el mismo mercado; o que se trate de cargas agrícolas, forestales o mineras, que sólo se producen a partir de

determinada distancia, etc. La fórmula fundamental que nos da la utilidad, sería en este caso

$$U = 2\gamma \frac{(v - c)}{f} \int_{x_1}^{\frac{c}{g}} (c - gx)\, dx =$$

$$= \gamma \frac{(v - c)}{fg} [c^2 - 2\, cgx_1 + g^2 x_1^2] =$$

$$= \gamma \frac{(v - c)}{fg} (c - gx_1)^2$$

De aquí sale, sucesivamente

$$\frac{dU}{dc} = \frac{\gamma\,(c - gx_1)}{fg} [-(c - gx_1) + 2\,(v - c)] = 0$$

$$\therefore \qquad c = \frac{2v + gx_1}{3}$$

Este será el valor de la tarifa de utilidad máxima, pues anula a la derivada primera, y sustituído en la segunda, le da un valor negativo. La utilidad será entonces

$$U = \frac{\gamma}{fg} \left(v - \frac{2v + gx_1}{3} \right) \left(\frac{2v + gx_1}{3} - gx_1 \right)^2$$

$$= \frac{4\gamma}{27\, fg} (v - gx_1)^3$$

Estos resultados se pueden combinar con los anteriores, suponiendo la zona dividida en varias secciones: una de 0 a x_1, en la cual la tarifa y la utilidad serán, según ya vimos

$$c = \frac{2v + gx_1}{4} \qquad ; \qquad U = \frac{\gamma}{8f} (2v - gx_1)^2 x_1$$

y otra de x_1 en adelante:

$$c = \frac{2v + gx_1}{3} \qquad ; \qquad U = \frac{4\gamma}{27\, fg} (v - gx_1)^3$$

La utilidad resultante será la suma de estas dos, y se puede entonces plantear el problema de determinar a x_1 de modo que sea máxima la utilidad conseguida con estas dos tarifas postales escalonadas. También se pueden suponer nuevos puntos de división, x_1, x_2, x_3..., y determinar las tarifas más convenientes dentro de cada tramo, y para la suma de todos los tramos.

Otro grupo interesante de problemas es el que resulta de considerar *ya existente* una zona de producción, de dimensión, ubicación y forma independiente de la tarifa; entonces la determinación de ésta se plantea en forma distinta a la utilizada en las páginas anteriores; hasta puede suceder que el ancho de la zona *aumente* en vez de disminuir con la distancia, y por lo tanto con la tarifa, como hemos supuesto precedentemente. Hay que buscar entonces si conviene aprovechar toda la zona, o sólo ciertas partes de ella, y cuáles, y a qué tarifa, para obtener la utilidad máxima. El planteo inicial sería escribir

$$U = 2\gamma \int_{x_1}^{x_2} z\,(c - gx)\,dx$$

siendo z una función de x, que caracterizase los límites extremos de la zona; y x_1 x_2 los valores de x que limitan el intervalo dentro del cual z conserva la misma forma. En el caso general, en vez de una, habría que hacer varias integraciones.

Pero como no nos proponemos aquí agotar todos los problemas a que dan origen las tarifas de tipo postal, asunto al cual pensamos dedicar un estudio aparte, nos limitamos a la enunciación de estas cuestiones.

(Continuará)

BIBLIOGRAFÍA (*)

Por C. C. D.

Durrieu (Mauricio). *Tratado de los Presupuestos de Obras de Ingeniería y Arquitectura.* (Tomos I a IV) 812 páginas 18 x 27. Buenos Aires, Tomás Palumbo, 1935-7.

Nuestro distinguido consocio publicó, no hace mucho, en los Anales de la Sociedad Científica Argentina, un trabajo titulado "Cotejos económicos y selección económica" (1), el cual había sido anteriormente materia de una comunicación a la Academia Nacional de Ciencias. Este nuevo trabajo que nos ocupa, mucho más extenso, encierra el mismo concepto de aquélla, si bien referido al solo campo de la construcción. El concepto de este nuevo estudio no queda sin embargo aun bien explicado en los cuatro fascículos aparecidos, que tan solamente contienen dos capítulos de los seis que constituirán, una vez terminados, la obra completa. Algo más de las tres cuartas partes de las 800 páginas publicadas, corresponden al capítulo segundo y suministran la documentación más general necesaria, en la práctica de la construcción, para formular buenas análisis de precios y costos. Esa documentación se encuentra casi toda expresada en forma de tablas, pues el autor ha utilizado la exposición corrida sólo cuando la tabular resultaba inconveniente o desperdiciaba espacio.

El profesor Durrieu ha utilizado datos observados en el país por él mismo o por algunos de sus discípulos. Los datos que traen esas tablas son, en gran parte, nuevos o inéditos, cuando no totalmente nuevos.

Lo primero ocurre en las tablas relativas a Yesería, Pinturería y trabajos de hincadura; lo segundo en las de Carpintería de Taller, Obras Sanitarias e Instalaciones Eléctricas.

Esas tablas, cuya utilidad se verá probablemente más cuando el autor publique la continuación de su trabajo, solo encaran el campo de los trabajos generales sin abordar los particulares correspondientes a ramas o especialidades de las profesiones del ingeniero y del arquitecto.

Se trata, como se ve, de un estudio que exige una labor enorme y que, de llevarla enteramente a cabo, exigiría el concurso de varios colaboradores; el ingeniero Durrieu, por su parte, ha procurado precisar datos de interés general. Muy versado el autor sobre materiales de construcción, ha procurado asentar las informaciones más aceptables relativas a los materiales nacionales; seguramente esos datos serán ampliados en algún otro capítulo que continúe el trabajo publicado hasta este momento. Al parecer el plan completo de dicho trabajo requerirá 1200 páginas impresas, y puede afirmarse que es el más amplio y moderno que cabe concebir ya que, por un lado, la materia económica ha sido siempre bastante descuidada por los ingenieros; y apenas si se nota, en la actualidad,

(*) De la *S. C. A.*

(1) Publicado luego en libro aparte, 125 págs. (17 × 26 ½). Palumbo, 1937.

una señalada reacción en ese sentido. Un gran paso fué dado cuando se procedió a la organización de los costos, punto fundamental que el ing. Durrieu se ocupa con extensión en el capítulo 1º estableciendo cuadros reasuntivos originales. Es evidentemente ilusorio calcular sin una precisa calificación de las cantidades con que se opera.

Clasificados los costos, vuélvese posible agruparlos en las expresiones esenciales de la formación de otros costos más complejos, y en atención a su naturaleza y a las condiciones de su obtensión y aplicación, constituyen sistemas definidos de estimación.

La selección de estos sistemos con el objeto de utilizarlos en la práctica, es una nueva exigencia técnica que se resuelve encarando diversas modalidades de la economía de la construcción. La magnitud de las obras, su ubicación, su extensión, difusión o agrupación; los medios de ejecución (el material a ese efecto destinado, su abundancia o su escasez, la facilidad o no de obtenerlos, su propiedad (mayor o menor); el plan de realización, el sistema de ejecución (por contrato, etc.); la premura; y tantos otros asuntos son factores que concurren más o menos intrínsecamente a decidir esa economía y que han de her considerados al presuponer.

Sin duda, tantos y tan intrincados elementos hacen que aun con mucha versación y experiencia, resulte difícil adquirir seguridad y acierto; pero parece más peligroso desconocerlos o desatenderlos. Cree, por eso, el Ing. Durrieu, en la conveniencia de enseñar, en ingeniería económica, el imperio del método científico en los procedimientos ya que solo con él pueden estimarse aquellos elementos en forma adecuada. Tal estimación es una función del tiempo disponible para efectuarla, de la precisión de los proyectos y de la forma de realización. Ni los datos tabulares de materiales y tiempos de ejecución, ni las fórmulas corrientes, bastan para satisfacerla; se necesita también el conocimiento teórico-práctico del director de las obras; este conocimiento constituye un elemento más, tan indispensable como los otros, pues sirve de guía para el técnico a los efectos de anticipar costos correspondientes a los planes y a los medios de construir que determina. También se necesitan elementos de comprobación; ellos se obtienen principalmente mediante las verificaciones de los trabajos ejecutados.

El autor piensa dedicar a dichos elementos el capítulo 6º de su libro, y en general manifiesta que lo restante de su trabajo consistirá en una amplia exposición del concepto y de los procedimientos relativos a todos estos últimos puntos mencionados. Se ve que el ingeniero Durrieu abarca la materia con criterio integral. Su actuación en la enseñanza superior ha respondido por lo demás a ese pensamiento de inculcar al ingeniero y al arquitecto, un criterio teórico-práctico completo. Según su propia expresión, "hay que tratar de hacer de él una breva que madure temprano y no un simple higo". Los estudios económicos de esos profesiona... deben, lo mismo que sus demás estudios, ser, a su juicio, profundos: nada de superficial ni de rudimentario.

Se trata, en suma, de un trabajo importante del ingeniero Durrieu que como otros de él, honra la ciencia en las ramas económicas de la ingeniería y de la arquitectura.

C. C. D.

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal
Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Ernesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzacov, Vladimir
Borruat, Luis A.
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Buich, Raúl
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Busso, Eduardo B.
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carboneli, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Dennler, Jorge
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
Kervar, Juan B.
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moragues Bernat, Jaime
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan
Novelli, Armando
Ogloblin, Alejandro
Oliveri, Alfredo B.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví y Oliveras, A.
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Parodi, Rodolfo
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Recce, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.

Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Sordelli, Alfredo
Soler, Frank L.
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milcíades A.
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Williams, Adolfo T.
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Vistalli, Alina M.
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo F.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Larrauri, Agustín C.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olaf Lützow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de

Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos
Rothlin, Edwin

Schmiedecke, Augusto
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.

Taravella, Ambrosio L.
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio

Vercelló, Carlos
Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Mesde L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bossi, Celestino
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos

Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando

Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo

Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Ahumada, Ciro
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benedetti, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.

Flor Alvarado, José M.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guevara, José R.
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo

Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Navarro Correas, José A.
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfrado

Ruíz, Aníbal
Ruíz Leal, Adrián
Sáez Medina, Miguel
San Martín, José Benito de
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretaria, Dra. Juana Cortelezzi; Tesorero, Dr. Carlos T. Teobaldo; Vocales: Ingº Juan Sabato, Ingº Manuel Ucha, Dr. Pedro G. Paternosto, Dr. Alberto E. Sagastume Berra.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Brau, Eduardo F.
Canals Frau, Salvador
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E.
Dalló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume Berra, A. E.
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño ,Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bodenbender, Guillermo	Córdoba
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo ..	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe ..	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.)
Perrin, Tomás G.	México
Perrine, Carlos D.	Córdoba
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma